

۱۴۰۳ نوبت دوم داخل

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۴	۱۵	۹	۱۲	۳	۲۰	۱۷
فیزیک	۸	۹	۱۷	۱	۱۶	۱۷	۲
شیمی	۷	۱۰	۱۱	۲	۱۰	۱۳	۷

۲- گزینه ۱

معمولاً امن ترین راه رسم جدول ارزش است. همان طور که در جدول زیر می بینید، در سه ستون اول برای گزاره $p \vee q$ و r طبق درس نامه هشت حالت ارزش را می نویسیم؛ بعد ارزش $p \Rightarrow q$ و $(p \Rightarrow q) \wedge r$ و $p \Rightarrow r$ را در سه ستون بعدی مشخص می کنیم. در ستون آخر هم ارزش $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ را می نویسیم.

گزاره اصلی	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$	$p \Rightarrow q$	r	q	p
د	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	د
د	د	د	د	د	د	ن
د	د	د	د	ن	ن	ن
د	د	ن	د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن

طبق جدول، گزاره داده شده همواره درست است.

تیزبازی در حالتی که هر ۳ گزاره درست باشند این گزاره درست است، ببینید:

$$((T \Rightarrow T) \wedge T) \Rightarrow (T \Rightarrow T)$$

پس ۲ و ۴ غلطاند. با فرض نادرستی فقط p هم به $(F \Rightarrow T) \wedge T \Rightarrow (F \Rightarrow T)$ می رسمیم که درست است؛ پس ۳ هم رد می شود و می ماند ۱.

۳- گزینه ۳

درس نامه ۱ در سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ ، طول و عرض رأس را می توانیم از رابطه های زیر به دست بیاوریم:

$$x_S = -\frac{B}{2A} \text{، طول رأس} \quad y_S = -\frac{\Delta}{4A} \text{، عرض رأس}$$

۲ هر وقت ضریب x^2 در یک سهمی مثبت بود، دهانه اش رو به بالا و هروقت منفی بود دهانه اش رو به پایین است.

گام ۱ ضریب x^2 در سهمی $y = -5x^2 + ax - 8$ عددی منفی است؛ پس طبق مورد (۲) درس نامه دهانه اش مثل شکل مقابل رو به پایین می شود:

گام ۲ همان طور که در شکل بالا می بینید، این سهمی در تمام قسمت قرمز رنگش اکیداً صعودی است و به محض این که از رأسش رد می شویم در قسمت آبی رنگ نزولی می شود، پس بزرگ ترین بازه ای که این سهمی در آن اکیداً صعودی هست بازه $(-\infty, x_S]$ است.

گام ۳ به گفته سوال، بزرگ ترین بازه ای که سهمی در آن اکیداً صعودی هست بازه $(-\infty, 2/5]$ است. از مقایسه این بازه با $(-\infty, x_S]$ نتیجه می گیریم که $x_S = 2/5$ می شود. حالا به کمک مورد (۱) درس نامه x_S را در سهمی $y = -5x^2 + ax - 8$ به دست می آوریم و مساوی $2/5$ می گذاریم:

$$-\frac{B}{2A} = 2/5 \Rightarrow -\frac{a}{2(-5)} = \frac{2}{5} \Rightarrow a = 25$$

$$y = -5x^2 + 25x - 8$$

پس ضابطه سهمی به این صورت شد:

ریاضیات

۱- گزینه ۲

درس نامه ۱ در دنباله های هندسی، از تقسیم هر جمله به جمله قبلی اش به قدرنسبت می رسمیم، یعنی:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

۲ اگر قدرنسبت یک دنباله هندسی بین ۰ و ۱ و یکی از جمله هایش عددی مثبت باشد، جمله هایش حتماً نزولی هستند.

گام ۱ طبق مورد (۱) درس نامه، نسبت جمله پنجم به چهارم و همین طور نسبت جمله هشتم به هفتم، باید مساوی q باشد:

$$q = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{2x+1} \quad (*)$$

گام ۲ معادله آبی رنگ بالا را طرفین وسطین می کنیم تا به یک معادله درجه دوم برسیم:

$$(x-1)(2x+1) = x(x+1) \Rightarrow 2x^2 + x - 2x - 1 = x^2 + x \Rightarrow x^2 - 2x = 1$$

گام ۳ به طرفین تساوی بالا یک واحد اضافه می کنیم تا به معادله $x^2 - 2x + 1 = 2$ برسیم، این جوری می توانیم جای سمت چپ این معادله بنویسیم $(x-1)^2$:

$$(x-1)^2 = 2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x-1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

گام ۴ حالا مقادیر x را در $(*)$ جای گذاری می کنیم تا هر دو مقدار قدرنسبت به دست بیاید:

$$\diamond x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow q_1 = \frac{(1+\sqrt{2})-1}{(1+\sqrt{2})+1} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$\diamond x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow q_2 = \frac{(1-\sqrt{2})-1}{(1-\sqrt{2})+1} = \frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

گام ۵ سوال حاصل ضرب دوتا قدرنسبت را می خواهد که می شود:

$$q_1 q_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \right) \left(\frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right) = \frac{-2}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{-2}{4-2} = -1$$

مزدوج

مشاوره بعضی وقت ها سوالات کنکور ایراد دارند، اما راستش را بخواهید این سوال خیلی خیلی ایراد دارد، چون هیچ کدام از قدرنسبت ها قابل قبول نیستند. بیا ببینیم

را که به ازای $x = 1 + \sqrt{2}$ به دست آمد بررسی کنیم. صورت و مخرج q مثبت و واحد بیشتر از صورتش است؛ پس q عددی بین ۰ و ۱ و در نتیجه طبق مورد (۲) درس نامه، جمله های دنباله باید نزولی باشند. اما اینجا از $a_4 = x+1$ به $a_5 = 2x+1$ به ازای $x = 1 + \sqrt{2}$ صعود داریم جای نزول، ببینید:

$$a_4 = x+1 = 2+\sqrt{2}, \quad a_5 = 2(1+\sqrt{2})+1 = 3+2\sqrt{2}$$

زیاد شد جای این که کم تر بشه!

پس این سوال کاملاً غلط است!

گام ۱ چون قرار است معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ دو تا ریشه داشته باشد، پس دلتایش بزرگتر از صفر است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow 7^2 - 4(2)(m) > 0 \Rightarrow 49 - 8m > 0$$

$$\Rightarrow 8m < 49 \Rightarrow m < 49/8 \dots (I)$$

گام ۲ فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله α و β باشند. به گفته سؤال این ریشه‌ها بزرگتر از -3 هستند؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \alpha > -3 \Rightarrow \alpha + 3 > 0 \\ \beta > -3 \Rightarrow \beta + 3 > 0 \end{cases}$$

گام ۳ با توجه به نامساوی‌های بالا، $\alpha + 3$ و $\beta + 3$ هر دو مثبت و در نتیجه ضربان هم مثبت است:

$$(\alpha + 3)(\beta + 3) > 0 \Rightarrow \alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 9 > 0 \Rightarrow P + 3S + 9 > 0 \quad (*)$$

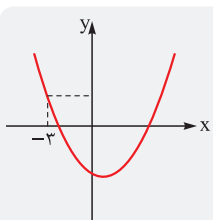
گام ۴ در ادامه به کمک مورد (۱) درس‌نامه، S و P را در معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} S = -\frac{B}{A} = -\frac{7}{2} \text{ یا } -3\frac{1}{2} \\ P = \frac{C}{A} = \frac{m}{2} \end{cases}$$

گام ۵ حالا S و P به دست آمده را در نامساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{m}{2} + 3(-3\frac{1}{2}) + 9 > 0 \Rightarrow \frac{m}{2} - 1\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{m}{2} > 1\frac{1}{2} \Rightarrow m > 3 \quad (II)$$

گام ۶ با توجه به نامساوی‌های (I) و (II) می‌توانیم بگوییم $3 < m < 49/8$ است؛ پس m سه مقدار صحیح ۴، ۵ و ۶ را می‌تواند داشته باشد.



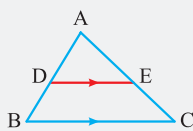
تیزبازی ضریب x^2 در سهمی $y = 2x^2 + 7x + m$ عددی مثبت است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه دهانه‌اش رو به بالاست و ریشه‌هایش هم بزرگتر از -3 اند، بنابراین نمودار سهمی می‌تواند به این صورت باشد: همان‌طور که در شکل می‌بینید، سهمی به ازای -3 عددی مثبت تحویل می‌دهد؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$2(-3)^2 + 7(-3) + m > 0 \Rightarrow 18 - 21 + m > 0 \Rightarrow m > 3$$

ادامه حل هم که مثل روش قبل است.

۴- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ در شکل زیر اگر DE با BC موازی باشد، می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم:



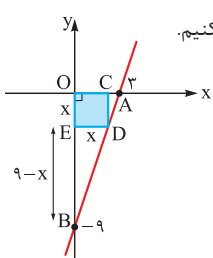
الف) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (جزء به جزء)

ب) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ (جزء به کل)

۲ اگر خطی محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول p و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض q قطع کند، معادله‌اش را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

۳ طول قطر مربعی به ضلع x می‌شود $x\sqrt{2}$.



روش گام ۱ رأس‌های مهم را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم. چون چهارضلعی رنگی مربع است، پس ED با OC و در نتیجه با OA هم موازی است؛ بنابراین طبق مورد (۱)

درس‌نامه می‌توانیم در مثلث AOB تالس بنویسیم.

گام ۲ فرض می‌کنیم طول ضلع مربع x باشد. در این صورت $BE = OB - OE = 9 - x$ و $ED = EO = x$

می‌شود. حالا در مثلث AOB تالس جزء به کل می‌نویسیم:

$$\frac{BE}{BO} = \frac{ED}{OA} \Rightarrow \frac{9-x}{9} = \frac{x}{9} \Rightarrow 9-x = x \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

گام ۳ حالا که می‌دانیم طول ضلع مربع $\frac{9}{4}$ است، طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم طول قطرش می‌شود:

$$OD = \frac{9}{4} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{9 \times 2}{4\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

گام ۴ حالا که a را داریم می‌توانیم به کمک مورد (۱) درس‌نامه، عرض رأس را هم حساب کنیم:

$$y_s = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{25^2 - 4(-5)(-8)}{4(-5)} = \frac{625 - 160}{-20} = \frac{465}{-20} = -\frac{465}{20} = -\frac{93}{4}$$

$$= -\frac{465}{20} + \frac{5}{4} = -23\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} = -22$$

۴- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اتحادهای چاق و لاغر را بلد باشید:

$$\begin{cases} (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \end{cases}$$

۲ فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه مثل $x^2 - 1$ و $q(x)$ هم یک چندجمله‌ای بدقتی تجزیه‌نشو مثل $x^2 + x + 1$ باشد. برای محاسبه باقی‌مانده $p(x)$ بر $q(x)$ کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

اول $q(x)$ را مساوی صفر می‌گذاریم، معمولاً در این تساوی به کمک اتحادها می‌توانیم به یک تساوی ساده‌تر برسیم، ببینید:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x(x-1)} (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \\ \Rightarrow x^2 = -x-1 \end{cases}$$

بعد سعی می‌کنیم در $p(x)$ تا جای ممکن x^3 بسازیم تا به جای x^3 و در مرحله بعدی x^2 بسازیم تا به جای x^2 بنویسیم، این‌جوری:

$$x^3 - 1 = (x^3)(x^2)(x^2) - 1 = (-x-1)(-x-1) - 1 = -x-2$$

حالا می‌توانیم بگوییم باقی‌مانده شد $-x-2$.

گام ۲ باقی‌مانده تقسیم $2 - x^{14}$ را بر چندجمله‌ای تجزیه‌نشو $x^2 + x + 1$ می‌خواهیم؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، $x^2 + x + 1$ را مساوی صفر می‌گذاریم و سعی می‌کنیم به کمک اتحادها به تساوی ساده‌تری برسیم. حواسمان هم هست که این عبارت خیلی شبیه قسمت چاق اتحاد چاق و لاغر است؛ پس این اتحاد انتخاب مناسبی است:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x(x-1)} (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \\ \Rightarrow x^2 = -x-1 \end{cases}$$

گام ۳ در ادامه باز هم طبق مورد (۲) درس‌نامه سعی می‌کنیم در مقسوم، یعنی $2 - x^{14}$ تا جای ممکن x^3 بسازیم تا به جای x^3 و در مرحله بعد x^2 بسازیم تا به جای x^2 بنویسیم:

$$2 - x^{14} = 2 - x^{12} \times x^2 = 2 - (x^3)^4 \times x^2 = 2 - (-x-1)^4 \times x^2 = 2 - (-x-1) = x+3$$

پس $r(x) = x+3$ و در نتیجه مجموع ضرایبش $4 = 1+3$ است.

مشاوره باقی‌مانده تقسیم بر چندجمله‌ای‌های تجزیه‌نشو، متأسفانه کاملاً خارج از کتاب درسی است. به همین خاطر احتمالاً در حل این سؤال دچار مشکل می‌شوید. درس‌نامه را بخوانید تا مشکلاتتان برطرف بشود.

۵- گزینه ۲

استراتژی قبل از هر چیز شرط Δ را بررسی می‌کنیم. در ادامه شرط ریشه‌ها را به زبان نامساوی‌ها می‌نویسیم و به کمکشان دوتا عبارت مثبت می‌سازیم تا بتوانیم حاصل‌ضربشان را بزرگتر از صفر بگذاریم. این‌جوری به نامعادله‌ای می‌رسیم که به کمک S و P می‌توانیم حلش کنیم.

درس‌نامه ۱ معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ به شرطی دوتا ریشه دارد که $\Delta > 0$ باشد. جمع (S) و ضرب (P) این ریشه‌ها هم از این رابطه‌ها محاسبه می‌شوند:

$$S = -\frac{B}{A} \quad \text{و} \quad P = \frac{C}{A}$$

۲ در سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ ، اگر ضریب x^2 یعنی A مثبت باشد، دهانه سهمی رو به بالا و اگر منفی باشد، دهانه سهمی رو به پایین است.

۸- گزینه ۳

گام ۱ با تابع دوطرفه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ طرف هستیم؛ پس اول باید بفهمیم برای محاسبه $f(1-|a|)$ و $f(2+|a|)$ از کدام ضابطه باید استفاده کنیم.

گام ۲ دو حالت را بررسی می‌کنیم:

♦ $a = 0$ باشد؛ در این حالت $f(1-|a|) = f(1) = 2(1) - 1 = 1$ و $f(2+|a|) = f(2) = 2^2 - 2 - 7 = -5$ است. ورودی‌های

f هر دو بزرگ‌تر مساوی ۱ شدند، پس برای محاسبه جفتشان از ضابطه بالایی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(1) = 1^2 - 1 - 7 = -7 \\ f(2) = 2^2 - 2 - 7 = -5 \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید به ازای $a = 0$ ، $f(1-|a|) = f(2+|a|)$ نشد؛ پس می‌رویم سراغ حالت دوم.

♦ a مثبت یا منفی باشد؛ در این حالت در عبارت « $1-|a|$ » عدد مثبت $|a|$ از ۱ کم می‌شود؛ پس حتماً $1-|a| < 1$ و در نتیجه برای محاسبه $f(1-|a|)$ باید از ضابطه پایینی $f(x) = 2x - 1$ استفاده کنیم:

$f(1-|a|) = 2(1-|a|) - 1 = 1 - 2|a|$
در عبارت « $2+|a|$ » هم عدد مثبت $|a|$ به ۲ اضافه می‌شود، پس حتماً $2+|a| \geq 1$ و در نتیجه برای محاسبه $f(2+|a|)$ از ضابطه بالایی $f(x) = x^2 - x - 7$ استفاده می‌کنیم:

$$f(2+|a|) = (2+|a|)^2 - (2+|a|) - 7 = 4 + 4|a| + |a|^2 - 2 - |a| - 7 = |a|^2 + 3|a| - 5$$

گام ۳ حالا طبق میل سؤال $f(1-|a|)$ را مساوی $f(2+|a|)$ می‌گذاریم تا مقادیر a پیدا بشوند:

$$|a|^2 + 3|a| - 5 = 1 - 2|a| \Rightarrow |a|^2 + 5|a| - 6 = 0 \Rightarrow (|a| - 1)(|a| + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ |a| = -6 \times \end{cases}$$

پس در مجموع دو مقدار $a = 1, -1$ خواسته سؤال را برآورده می‌کند.

۹- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر نمودار تابع $f(x)$ را بلد باشیم، می‌توانیم به کمک جدول زیر نمودار توابع $f(x) \pm k$ ، $f(x \pm k)$ و همین‌طور $-f(x)$ را هم بکشیم (k هم عددی مثبت است):

ضابطه تابع	روش رسم از روی $f(x)$
$f(x+k)$	نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت چپ می‌بریم.
$f(x-k)$	نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت راست می‌بریم.
$f(x)+k$	نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت بالا می‌بریم.
$f(x)-k$	نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت پایین می‌بریم.
$-f(x)$	نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

۲ اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، برای $f > 0$ ، تابع $\sqrt{f}$ هم نزولی خواهد بود.

۳ اگر نقطه‌ای با طول و عرض یکسان مثل $A(a, a)$ روی f باشد، قطعاً روی f^{-1} هم هست.

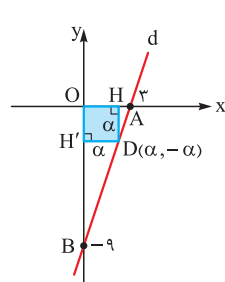
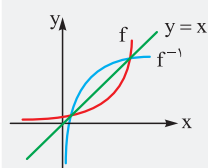
۴ اگر تابع f با دامنه $D_f = [a, b]$ اکیداً نزولی باشد، بردش برابر است با:

$$R_f = [f(b), f(a)]$$

۵ دامنه f همان برد f^{-1} و برد f همان دامنه f^{-1} است.

۶ اگر نمودار تابع وارون‌پذیر f را نسبت به خط $y = x$ همان نیمساز ناحیه اول و سوم) قرینه کنیم، به نمودار f^{-1}

می‌رسیم. یک نمونه ببینید:



$$d: \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{-9} = 1$$

گام ۱ نقطه $D(\alpha, -\alpha)$ روی خط d قرار دارد؛ پس باید در معادله‌اش صدق کند:

$$\frac{\alpha}{\alpha} + \frac{-\alpha}{-9} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{9} = 1 \Rightarrow \alpha = 9$$

بنابراین مختصات نقطه D به صورت $D(9, -9)$ می‌شود.

گام ۲ اول نکته زیر را بخوانید:

☆ **نکته** فاصله نقطه $A(a, b)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $OA = \sqrt{a^2 + b^2}$

طول قطر مربع همان فاصله نقطه $D(9, -9)$ از مبدأ مختصات است که نکته بالا برابر می‌شود با:

$$OD = \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 9$$

۷- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ اگر نقطه‌ای مثل A روی تابع $y = f(x)$ باشد، می‌توانیم مختصات پارامتری‌اش را به صورت $A(\alpha, f(\alpha))$ در نظر بگیریم. مثلاً اگر نقطه A روی خط $y = x + 1$ قرار داشته باشد، مختصات پارامتری‌اش به صورت $A(\alpha, \alpha + 1)$ است.

۲ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

۳ در مستطیل طول قطرها برابرند.

گام ۱ اول شکل فرضی زیر را می‌کشیم. به گفته سؤال نقطه‌های B و D روی خط $x - 3y = 3$ یا $x = 3y + 3$ قرار دارند؛ پس می‌توانیم مختصات پارامتری‌شان را به صورت $B(3\alpha + 3, \alpha)$ و $D(3\beta + 3, \beta)$ در نظر بگیریم.

گام ۲ طبق مورد (۳) درس‌نامه، طول قطره‌های AC و BD در مستطیل برابرند. طول این دو پاره‌خط را به کمک مورد (۲) درس‌نامه به دست می‌آوریم و مساوی هم می‌گذاریم:

$$\begin{aligned} BD = AC &\Rightarrow \sqrt{((3\alpha + 3) - (3\beta + 3))^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{((3\alpha + 3) - (3\beta + 3))^2 + (\alpha - \beta)^2} \\ &= \sqrt{(3\alpha - 3\beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{10(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{10}|\alpha - \beta| \\ &\Rightarrow \sqrt{10}|\alpha - \beta| = \sqrt{10} \Rightarrow |\alpha - \beta| = 1 \Rightarrow \alpha - \beta = \pm 1 \end{aligned}$$

این‌جا باید حواسمان باشد که مقدار درست $\alpha - \beta$ را انتخاب کنیم. طبق شکل بالا عرض نقطه B از D بیشتر، یعنی $\alpha > \beta$ است. این یعنی $\alpha - \beta > 0$ و در نتیجه $\alpha - \beta = +1$ انتخاب می‌کنیم.

گام ۳ سؤال اختلاف طول نقطه‌های $B(3\alpha + 3, \alpha)$ و $D(3\beta + 3, \beta)$ را می‌خواهد که می‌شود:

$$(3\alpha + 3) - (3\beta + 3) = 3(\alpha - \beta) = 3$$

بالاتر شد ۱

تله اگر حواسمان نبود و به جای اختلاف طول‌ها، اختلاف عرض‌ها یعنی $\alpha - \beta$ را انتخاب می‌کردیم، این‌جوری در تله ۳ می‌افتادیم.

(ب) جمع و تفریق دو لگاریتم با مبنای یکسان به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

(پ) لگاریتم، توانی را که روی عبارت جلوی نشسته باشد به عنوان ضریب به پشت خودش منتقل می‌کند، یعنی:

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

(ت) لگاریتم، معکوس توانی را که روی مبنایش نشسته باشد به عنوان ضریب به پشت خودش منتقل می‌کند، یعنی:

$$\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$$

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

(ث) ترکیب دو قانون بالا به این صورت می‌شود:

گام ۱ در تساوی داده‌شده، جای $(x-2)^2$ حق داریم بنویسیم $(2-x)^2$ تا به تساوی $\log_{10} \frac{1}{(2-x)^2} - \log_{10} (2-x) = 3$ برسیم. در سمت چپ این تساوی تفریق دو لگاریتم با مبنای یکسان را داریم؛ پس طبق مورد (ب) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\log_{10} \frac{(2-x)}{1} = 3 \Rightarrow \log_{10} (2-x)^3 = 3$$

گام ۲ حالا طبق مورد (پ) درس‌نامه اول توان ۳ را از روی $(2-x)^3$ برمی‌داریم و به عنوان ضریب، پشت لگاریتم می‌گذاریم؛ بعد از مورد (الف) درس‌نامه استفاده می‌کنیم:

$$3 \log_{10} (2-x) = 3 \Rightarrow (2-x) = 10^1 \Rightarrow x = -8$$

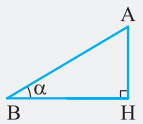
گام ۳ $\log_{\sqrt{2}} (-x)$ به ازای $x = -8$ می‌شود $\log_{\sqrt{2}} 8$. حالا جای ۸ می‌نویسیم 2^3 و

جای $\sqrt{2}$ هم می‌نویسیم $2^{\frac{1}{2}}$ تا بتوانیم به کمک مورد (ث) درس‌نامه، خواسته سؤال را حساب کنیم:

$$\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 6 \times 1 = 6$$

۱۱- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ در مثلث قائم‌الزاویه، اگر طول ضلع مقابل به یک زاویه حاده را به طول



ضلع مجاورش تقسیم کنیم، به تانژانت آن زاویه می‌رسیم.

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AH}{BH}$$

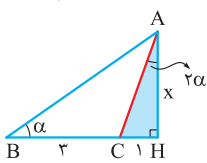
اگر طول ضلع مجاور به یک زاویه حاده را به طول وتر تقسیم کنیم؛ به کسینوس آن زاویه می‌رسیم. مثلاً $\cos \alpha$ در شکل بالا می‌شود:

$$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{BH}{AB}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

۲ برای $\tan 2\alpha$ ، اتحاد مقابل را بلد باشید:

گام ۱ رأس‌های شکل را به این صورت نام‌گذاری می‌کنیم، طول AH را هم X در نظر می‌گیریم.



برای زاویه α در مثلث قائم‌الزاویه ABH، به کمک مورد (۱)

درس‌نامه، تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan \alpha = \frac{AH}{BH} \xrightarrow{BH=2+1=3, AH=x} \tan \alpha = \frac{x}{3} (*)$$

گام ۲ حالا به مثلث قائم‌الزاویه رنگی بالا نگاه کنید. در این مثلث برای زاویه 2α تانژانت

$$\tan 2\alpha = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{1}{x}$$

می‌نویسیم:

طبق مورد (۲) درس‌نامه، $\tan 2\alpha$ همان $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ است؛ پس رابطه بالا به این صورت

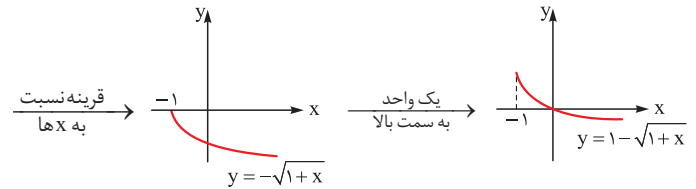
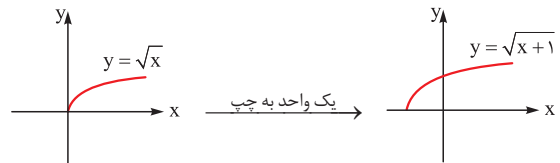
$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{x}$$

درمی‌آید:

گام ۳ طبق رابطه (*) می‌توانیم به جای $\tan \alpha$ در تساوی بالا بنویسیم $\frac{x}{3}$:

$$\frac{2(\frac{x}{3})}{1 - (\frac{x}{3})^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\frac{2x}{3}}{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

گام ۱ اول نمودار تابع $y = 1 - \sqrt{1+x}$ را می‌کشیم تا به کمکش هم صعودی یا نزولی بودن $y = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$ را بفهمیم هم دامنه‌اش را. به کمک مورد (۱) درس‌نامه، در سه مرحله از روی نمودار $y = \sqrt{x}$ به نمودار $y = 1 - \sqrt{1+x}$ می‌رسیم:



همان‌طور که در نمودار بالا می‌بینید، $y = 1 - \sqrt{1+x}$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، چون در این تابع $y(0) = 1 - \sqrt{1+0} = 0$ می‌شود و این یعنی نمودارش از نقطه $(0,0)$ یا همان مبدأ مختصات می‌گذرد.

گام ۲ از نمودار تابع $y = 1 - \sqrt{1+x}$ دو چیز می‌فهمیم. اول این‌که $y = 1 - \sqrt{1+x}$

نزولی است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، جذرش یعنی $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$ هم نزولی است. دوم این‌که دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$ جاهایی است که $1 - \sqrt{1+x} \geq 0$ باشد؛ طبق نمودار این اتفاق فقط در بازه $[-1,0]$ می‌افتد که نمودار بالای محور X‌ها است؛ پس $D_f = [-1,0]$ می‌شود.

گام ۳ تا این‌جا فهمیدیم f تابعی اکیداً نزولی با دامنه $D_f = [-1,0]$ است؛ پس طبق مورد (۴) درس‌نامه بردش می‌شود:

$$R_f = [f(0), f(-1)]$$

گام ۴ طبق مورد (۲) درس‌نامه R_f همان $D_{f^{-1}}$ است، پس:

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0,1]$$

گام ۵ دامنه تابع‌های f و f^{-1} ، یعنی $D_f = [-1,0]$ و $D_{f^{-1}} = [0,1]$ فقط در $x=0$ مشترک‌اند؛ پس اگر قرار باشد تابع‌های f و f^{-1} همدیگر را قطع کنند، فقط در $x=0$ همچنین چیزی امکان دارد. همین‌جا می‌توانیم بگوییم f و f^{-1} یا در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند یا هیچ نقطه تقاطعی وجود ندارد.

دومی در گزینه‌ها نیست ولی «یک نقطه برخورد» در ۴ وجود دارد؛ پس همین گزینه جواب است اما تحلیل این موضوع را هم ببینید:

دیدیم که $f(0) = 0$ شد؛ بنابراین نقطه $(0,0)$ روی f و در نتیجه طبق مورد (۳) درس‌نامه روی f^{-1} هم هست. این یعنی f و f^{-1} فقط در نقطه $(0,0)$ همدیگر را قطع می‌کنند.

تیزبازی با توجه به دامنه و برد f(x) که قبل‌تر به دست آوردیم، می‌توانیم بگوییم نمودارش تقریباً این‌شکلی است:



حالا طبق مورد (۶) درس‌نامه، نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا به نمودار f^{-1} برسیم:



همان‌طور که می‌بینید، f و f^{-1} دقیقاً در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

۱۰- گزینه ۲

درس‌نامه در دنیای لگاریتم‌ها قوانین مهم زیر برقرارند:

(الف) اگر $\log_a b = c$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$a^c = b$$



۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه « $180^\circ - \alpha$ » به صورت زیر است:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

گام ۱ از تساوی $\tan(\hat{B} - \hat{C}) = \sqrt{3}$ می‌فهمیم که $\hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$ است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos(\hat{B} - \hat{C}) = \cos 60^\circ \Rightarrow \cos(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2} \quad (*)$$

گام ۲ در عبارت $M = \frac{1 - 2 \cos(\hat{B} + \hat{C})}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}}$ ، صورت و مخرج را به ۲ تقسیم می‌کنیم تا به

$$M = \frac{\frac{1}{2} - \cos(\hat{B} + \hat{C})}{2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}}$$

$$M = \frac{\cos(\hat{B} - \hat{C}) - \cos(\hat{B} + \hat{C})}{2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} \quad \text{بنویسیم } \frac{1}{2} \cos(\hat{B} - \hat{C})$$

گام ۳ حالا $\cos(\hat{B} - \hat{C})$ و $\cos(\hat{B} + \hat{C})$ در تساوی بالا را به کمک درس‌نامه، بازشان می‌کنیم:

$$M = \frac{(\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C}) - (\cos \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{B} \sin \hat{C})}{2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}}$$

$$= \frac{2 \sin \hat{B} \sin \hat{C}}{2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} = \tan \hat{C}$$

تیزبازی بعد از این که فهمیدیم $\hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$ می‌شود، می‌توانیم فرض کنیم $\hat{B} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$ است. این جوری خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$M = \frac{1 - 2 \cos(\hat{B} + \hat{C})}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{1 - 2 \cos(90^\circ + 30^\circ)}{4 \sin 90^\circ \cos 30^\circ}$$

$\sin 90^\circ$ و $\cos 30^\circ$ که به ترتیب ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ)$ هم طبق

مورد (۲) درس‌نامه می‌شود $-\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ ؛ بنابراین M برابر است با:

$$M = \frac{1 - 2(-\frac{1}{2})}{4(1)(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

تنها گزینه‌ای که به ما $\frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌دهد $\tan \hat{C}$ در ۴ است، ببینید:

$$\tan \hat{C} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

فرض کردیم 30° باشد

پس همین گزینه جواب است.



۱۴ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ برای از بین بردن منفی پشت کسینوس در $-\cos \alpha$ ، به جای α

مکملش یعنی $\pi - \alpha$ را قرار می‌دهیم. برای از بین بردن منفی پشت بقیه نسبت‌های مثلثاتی

هم، زاویه را قرینه می‌کنیم. ببینید:

$-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$	$-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$
$-\tan \alpha = \tan(-\alpha)$	$-\cot \alpha = \cot(-\alpha)$

۲ برای حل معادلات مثلثاتی داریم:

$\sin A = \sin B \Rightarrow \begin{cases} A = 2k\pi + B \\ A = 2k\pi + \pi - B \end{cases}$
$\cos A = \cos B \Rightarrow \begin{cases} A = 2k\pi + B \\ A = 2k\pi - B \end{cases}$
$\tan A = \tan B \Rightarrow A = k\pi + B$

گام ۱ اول معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{9}{16}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

گام ۱ حالا که x را داریم، می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه رنگی، طول وتر AC را حساب کنیم:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC^2 = x^2 + 1^2$$

$$\xrightarrow{x^2 = \frac{16}{9}} AC^2 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

گام ۲ الان در مثلث قائم‌الزاویه رنگی، هم طول ضلع مجاور 2α را داریم هم طول وتر، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، $\cos 2\alpha$ می‌شود:

$$\cos 2\alpha = \frac{x}{AC} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$



۱۲ - گزینه ۱

درس‌نامه اتحادهای مثلثاتی زیر را بلد باشید:

$$\diamond \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{یا} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{یا} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\diamond 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{یا} \quad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

گام ۱ اول در تساوی $3 \sin^2 x + a \cos^2 x = 4$ ، جای $\cos^2 x$ می‌نویسیم:

$$3 \sin^2 x + a(1 - \sin^2 x) = 4 \Rightarrow 3 \sin^2 x - a \sin^2 x = 4 - a$$

$$\Rightarrow (3 - a) \sin^2 x = 4 - a \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4 - a}{3 - a} \quad (*)$$

گام ۲ طبق درس‌نامه $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ است. در این تساوی طبق (*) می‌توانیم جای $\sin^2 x$ عبارت $\frac{4 - a}{3 - a}$ را بنویسیم:

$$\cot^2 x = \frac{1}{\frac{4 - a}{3 - a}} - 1 = \frac{3 - a}{4 - a} - 1 = \frac{3 - a - (4 - a)}{4 - a} = \frac{-1}{4 - a} = \frac{1}{a - 4}$$

تیزبازی بیا در تساوی $3 \sin^2 x + a \cos^2 x = 4$ ، به جای x بگذاریم 60° :

$$3 \sin^2 60^\circ + a \cos^2 60^\circ = 4$$

$\sin^2 60^\circ$ همان $\frac{3}{4}$ و $\cos^2 60^\circ$ هم همان $\frac{1}{4}$ است. این مقادیر را در

تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$3(\frac{3}{4}) + a(\frac{1}{4}) = 4 \Rightarrow \frac{9}{4} + \frac{a}{4} = 4 \Rightarrow \frac{a}{4} = 4 - \frac{9}{4} \xrightarrow{\times 4} a = 16 - 9 = 7$$

خواسته سؤال یعنی $\cot^2 x$ هم به ازای $x = 60^\circ$ می‌شود:

$$\cot^2 60^\circ = (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

حالا باید به دنبال گزینه‌ای بگردیم که به ازای $a = 7$ بشود $\frac{1}{3}$. این اتفاق فقط برای

در ۱ می‌افتد. ببینید:

$$\frac{1}{a - 4} = \frac{1}{7 - 4} = \frac{1}{3}$$

پس همین گزینه جواب است.



۱۳ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ $\cos(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ را به کمک رابطه‌های زیر می‌توانیم

بازشان کنیم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

گام ۱ حالا طبق میل سؤال حد را مساوی ۲ می‌گذاریم: $\frac{b+c}{\sqrt{}} = 2 \Rightarrow b+c=4$

پس خواسته سؤال می‌شود: $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a} = \frac{4}{-1} = -4$

تیزبازی اول نکته زیر را بخوانید:

نکته هر وقت $u \rightarrow 0$ و در حدمان عبارتی مثل $\sqrt[n]{1+u}$ داشتیم، می‌توانیم به جای بنویسیم $1 + \frac{u}{n}$. مثلاً اگر $x \rightarrow 0$ ، می‌توانیم به جای $\sqrt{1+x}$ بنویسیم $1 + \frac{x}{2}$.

در حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{1 + bcx^2 + bx + cx}}{x}$ به سمت ۰ میل می‌کند؛ پس طبق

نکته بالا به جای $\sqrt{1 + bcx^2 + bx + cx}$ می‌توانیم بنویسیم $1 + \frac{bcx^2 + bx + cx}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{1 + bcx^2 + bx + cx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + 1 + \frac{bcx^2 + bx + cx}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{bcx^2 + bx + cx}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bcx + b + c}{2} = \frac{b+c}{2}$$

طبق میل سؤال حد را مساوی ۲ می‌گذاریم: $\frac{b+c}{2} = 2 \Rightarrow b+c=4$

که باز هم خواسته سؤال می‌شود: $\frac{b+c}{a} = \frac{4}{-1} = -4$

۱۶- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ اگر $x = \alpha, \beta$ ریشه‌های عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ باشند، تجزیه‌شده این معادله به صورت $a(x-\alpha)(x-\beta)$ می‌شود و در صورتی که $x = \alpha$ ریشه مضاعف $ax^2 + bx + c$ باشد، تجزیه‌شده آن به صورت $a(x-\alpha)^2$ می‌شود.

۲ اگر $x = k$ ریشهٔ مخرج تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد ولی ریشهٔ صورتش نباشد، می‌توانیم بگوییم $x = k$ مجانب قائم تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ است.

گام ۱ برای این که بفهمیم کجاها مجانب قائم داریم، باید اول ریشه‌های صورت کسر یعنی

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \text{ را تجزیه کنیم. برای این کار ریشه‌هایش را لازم داریم:}$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(-3)}}{2(3)} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{6} = 3 \\ x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

حالا که ریشه‌های عبارت درجه دوم را داریم، می‌توانیم بگوییم طبق مورد (۱) درس‌نامه صورت کسر به صورت $3(x-3)(x+\frac{1}{3})$ است.

$$f(x) = \frac{3(x-3)(x+\frac{1}{3})}{ax^2 + (-a)x + a+1}$$

گام ۲ برای این که $f(x)$ یک مجانب قائم داشته باشد، طبق مورد (۲) درس‌نامه باید مخرجش یک ریشه داشته باشد، ریشه‌ای غیرمشتربک با صورت. حالا حالت‌هایی را که ممکن است این اتفاق بیافتد بررسی می‌کنیم:

گام ۳ مخرج تابع درجه ۱ باشد؛ در این حالت نباید در مخرج x^2 ببینیم؛ پس ضریبش یعنی a را مساوی صفر می‌گذاریم:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (-a)x + a+1} \xrightarrow{a=0} f(x) = \frac{3(x-3)(x+\frac{1}{3})}{x+1}$$

همان‌طور که می‌بینید، در این حالت $x = -1$ ریشهٔ مخرج هست ولی ریشهٔ صورت نیست؛ پس تابع یک مجانب قائم دارد. تا این جا یک مقدار برای a پیدا کردیم.

طبق مورد (۱) درس‌نامه برای از بین بردن منفی پشت کسینوس در $-\cos(x + \frac{\pi}{4})$ به جای $x + \frac{\pi}{4}$ « $x + \frac{\pi}{4}$ » مکتبلش یعنی $x - \frac{3\pi}{4} = \pi - (x + \frac{\pi}{4})$ را قرار بدهیم، این جوری به معادلهٔ مقابل می‌رسیم:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4} - x)$$

گام ۴ حالا به کمک مورد (۲) درس‌نامه، جواب‌های معادلهٔ بالا را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + (\frac{3\pi}{4} - x) \Rightarrow 3x = \frac{2k\pi + \pi}{(2k+1)\pi} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - (\frac{3\pi}{4} - x) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (\frac{2k+1}{3})\pi \xrightarrow[k=-1, 0]{k \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \\ x = (2k - \frac{\pi}{2})\pi \xrightarrow[k=0]{k \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ۳ تا جواب دارد.

۱۵- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ رفع ابهام صفرصفر در حضور مجهول، هر وقت سؤال گفت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

مساوی یک عدد حقیقی ناصفر است ولی با جای گذاری $x = a$ در عبارت جلوی حد به $\frac{0}{0}$

یا $\frac{\infty}{\infty}$ رسیدید، سریعاً $\frac{0}{0}$ را هم مساوی صفر بگذارید. این جوری به یک حد $\frac{0}{0}$ می‌رسید

که حاصلش بعد از رفع ابهام، برابر آن عدد حقیقی ناصفر می‌شود.

۲ یکی از سریع‌ترین روش‌های رفع ابهام صفرصفر، استفاده از قاعدهٔ هسپیتال است. در این روش اول جای صورت و مخرج مشتقشان را می‌نویسیم، بعد سراغ محاسبهٔ حد می‌رویم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۳ فرمول مشتق بعضی از انواع توابع را در جدول زیر ببینید:

تابع	فرمول مشتق
ax^n	anx^{n-1}
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

گام ۱ به گفتهٔ سؤال $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x}$ مساوی عدد غیرصفر ۲ است، ولی

مخرج این حد به ازای $x = 0$ صفر می‌شود؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه باید صورت هم برابر صفر باشد:

$$a + \sqrt{(0+1)(0+1)} = 0 \Rightarrow a = -1$$

گام ۲ به ازای $a = -1$ حد بالا به این صورت درمی‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{bcx^2 + bx + cx + 1}}{x} = 2$$

گام ۳ با جای گذاری $x = 0$ در عبارت جلوی حد به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه هسپیتال می‌زنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{bcx^2 + bx + cx + 1}}{x} &\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{2\sqrt{bcx^2 + bx + cx + 1}} + \frac{bcx + b + c}{2\sqrt{bcx^2 + bx + cx + 1}}}{1} \\ &= \frac{0 + \frac{b+c}{2\sqrt{1}}}{1} = \frac{b+c}{2} \end{aligned}$$

♦ **حد چپ و مقدار** $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) = |c-1|$

حالا حد چپ و راست و مقدار f در $x = c$ را، مساوی هم می‌گذاریم:

$$ac^2 + bc + 2 = |c-1|$$

به گفته سؤال c عددی طبیعی است؛ پس $c \geq 1$ و در نتیجه $c-1 \geq 0$ می‌شود، بنابراین می‌توانیم در تساوی بالا خود $c-1$ را از قدرمطلق بیرون بیاوریم:

$$ac^2 + bc + 2 = c-1 \Rightarrow ac^2 + bc - c + 3 = 0 \quad (I)$$

♦ **پیوستگی f در $x = -c$** : برای محاسبه حد راست و مقدار f در $x = -c$ سراغ ضابطه بالایی و برای محاسبه حد چپ سراغ ضابطه پایینی می‌رویم:

♦ **حد راست و مقدار** $\lim_{x \rightarrow (-c)^+} f(x) = f(-c) = |-c-1|$

♦ **حد چپ** $\lim_{x \rightarrow (-c)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-c)^-} (ax^2 + bx + 2)$

$$= a(-c)^2 + b(-c) + 2 = ac^2 - bc + 2$$

این بار حد چپ و راست و مقدار f در $x = -c$ را مساوی هم می‌گذاریم:

$$ac^2 - bc + 2 = |-c-1|$$

چون c عددی طبیعی است، پس $-c-1 < 0$ حتماً عددی منفی و در نتیجه $-c-1$ هم عددی منفی است؛ بنابراین در تساوی بالا باید قرینه $c-1$ را از قدرمطلق بیرون بیاوریم:

$$ac^2 - bc + 2 = -(c-1) \Rightarrow ac^2 - bc - c + 1 = 0 \quad (II)$$

♦ **طرفین رابطه‌های (I) و (II) را از هم کم می‌کنیم تا رابطه بین b و c را به دست بیاوریم:**

$$\begin{cases} ac^2 + bc - c + 3 = 0 \\ ac^2 - bc - c + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{پایینی} - \text{بالایی}} 2bc + 2 = 0$$

$$\Rightarrow bc + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{c} \quad (*)$$

طبق رابطه (*) می‌توانیم در تساوی $ac^2 + bc - c + 3 = 0$ به جای b بنویسیم:

$$ac^2 - \frac{1}{c} \times c - c + 3 = 0 \Rightarrow ac^2 - c + 2 = 0$$

$$\Rightarrow ac^2 = c-2 \Rightarrow a = \frac{c-2}{c^2} \quad (**)$$

♦ حالا به کمک تساوی‌های (*) و (**) خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$M = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c-2}{c^2} \\ -\frac{1}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c+2 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\frac{2}{c} \\ \frac{2}{c} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مورد (2) درس‌نامه}} -1 + \begin{bmatrix} \frac{2}{c} \end{bmatrix}$$

c عددی طبیعی است. اگر $c=1$ باشد:

$$M = -1 + \begin{bmatrix} \frac{2}{c} \end{bmatrix} = -1 + \begin{bmatrix} \frac{2}{1} \end{bmatrix} = +1$$

$$M = -1 + \begin{bmatrix} \frac{2}{c} \end{bmatrix} = -1 + \begin{bmatrix} \frac{2}{2} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{اگر } c=2 \text{ باشد:}$$

$$M = -1 + \begin{bmatrix} \frac{2}{c} \end{bmatrix} = -1 \quad \text{و اگر } c > 2, \text{ مثلاً } c=3 \text{ باشد:}$$

بنابراین $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ می‌تواند برابر ۱، صفر یا ۱- باشد که فقط ۱- را در ① داریم، پس همین گزینه جواب است.

♦ **تیزبازی** چون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & ; |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & ; |x| > c \end{cases}$ به ازای مقادیر طبیعی c

روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؛ پس به ازای $c=3$ هم باید روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. پس پیوستگی

تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & ; |x| \leq 3 \\ ax^2 + bx + 2 & ; |x| > 3 \end{cases}$ را بررسی می‌کنیم. این تابع باید در $x=3$

♦ **پیوسته باشد:** $\lim_{x \rightarrow 3^+} (ax^2 + bx + 2) = 9a + 3b + 2$

♦ **گام ۱** **مخرج تابع درجه ۲ باشد**، در این حالت برای این که در مخرج یک ریشه بینیم دوتا کار می‌توانیم انجام بدهیم:

♦ کاری کنیم که مخرج ریشه مضاعف داشته باشد:

دلتای مخرج را مساوی صفر می‌گذاریم:

$$ax^2 + (1-a)x + a+1 \Rightarrow \Delta = (1-a)^2 - 4a(a+1)$$

$$= a^2 - 2a + 1 - 4a^2 - 4a = 0 \Rightarrow -3a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(-3)(1)}}{2(-3)}$$

$$\begin{cases} a = \frac{6 + \sqrt{48}}{-6} = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{-6} = -\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \\ a = \frac{6 - \sqrt{48}}{-6} = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{-6} = -\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

پس به ازای دو مقدار a مخرج ریشه مضاعف داشته که در این صورت f یک مجانب قائم دارد.

♦ کاری کنیم که مخرج دو ریشه داشته باشد ولی یکی از ریشه‌های آن با یکی از ریشه‌های صورت (یعنی $x=3$ یا $x=-\frac{1}{3}$) یکسان باشد: در این صورت یکی از ریشه‌های صورت و مخرج با هم ساده می‌شوند و بعد از آن، در مخرج یک ریشه داریم که ریشه صورت نیست، پس حتماً یک مجانب قائم خواهیم داشت.

(I) اگر $x=3$ ریشه مخرج باشد، داریم:

$$ax^2 + (1-a)x + a+1 \xrightarrow{x=3} 9a + 3 - 3a + a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 7a + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{7}$$

(II) اگر $x = -\frac{1}{3}$ ریشه مخرج باشد، داریم:

$$ax^2 + (1-a)x + a+1 \xrightarrow{x=-\frac{1}{3}} \frac{1}{9}a - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}a + a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{13}{9}a + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow a = -\frac{6}{13}$$

بنابراین در مجموع به ازای ۵ مقدار برای a ، تابع f یک مجانب قائم دارد.

۱۷- گزینه‌ها

♦ **درس‌نامه ۱** دو جا خیلی سریع می‌توانید قدرمطلق را در نامساوی‌ها حذف کنید:

♦ $|a| < b \Rightarrow -b < a < b$

♦ $|a| > b \Rightarrow a > b \text{ یا } a < -b$

۲ تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه حد چپ، حد راست و مقدارش در $x=a$ مساوی هم باشند، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

۳ اگر درون جزء صحیح، عدد صحیحی جمع یا منها شده باشد، می‌توانیم از جزء صحیح بیرون بیاوریمش، این یعنی اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، $[x \pm a]$ همان $[x] \pm a$ است.

♦ **گام ۱** $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |x-1|$ همان $\sqrt{(x-1)^2}$ است. طبق مورد (۱) درس‌نامه هم می‌توانیم به جای $|x| \leq c$ بنویسیم $-c \leq x \leq c$ و به جای $|x| > c$ بنویسیم $x > c$ یا $x < -c$ ؛ پس $f(x)$ به این صورت درمی‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & ; |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & ; |x| > c \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x-1| & ; -c \leq x \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & ; x < -c \text{ یا } x > c \end{cases}$$

♦ **گام ۲** به گفته سؤال، $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است؛ پس باید در $x=c$ و $x=-c$ هم پیوسته باشد:

♦ **پیوستگی در $x=c$** : برای محاسبه حد چپ و مقدار f در $x=c$ از ضابطه بالایی و برای محاسبه حد راست از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

♦ **حد راست** $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} (ax^2 + bx + 2) = ac^2 + bc + 2$

گام ۱ قبل از هر چیز به ضابطه پایین، یعنی $f(x) = b + (x-a)^m$ توجه کنید. به گفته سؤال دامنه این ضابطه $x \geq a$ است، این یعنی برای این ضابطه $f(a)$ تعریف شده است. این جا دو تا محدودیت برای m درست می شود:

♦ **m نمی تواند صفر باشد**، چون اگر صفر باشد، $f(x) = b + (x-a)^0$ و در نتیجه $f(a)$ می شود: $f(a) = b + 0$

♦ هم که تعریف نشده است، پس در این حالت $f(a)$ وجود ندارد؛ بنابراین $m \neq 0$ است.

♦ **m نمی تواند منفی باشد**؛ چون اگر m عددی منفی مثل $m = -1$ باشد، $f(x) = b + (x-a)^{-1} = b + \frac{1}{x-a}$ می شود. در این حالت $x = a$ ریشه مخرج است و باز هم $f(a)$ تعریف نشده می شود.

تا این جا فهمیدیم که m عددی صحیح و مثبت است، یعنی: $m \geq 1$

گام ۲ حالا باید بفهمیم چه نقطه هایی می توانند گوشه ای باشند. به ازای $x < a$ ، با تابع ثابت $f(x) = b$ طرف هستیم که پیوسته و مشتق پذیر است؛ پس به ازای $x < a$ نقطه گوشه ای نداریم. به ازای $x > a$ هم با تابع $f(x) = b + (x-a)^m$ طرفیم که به ازای m های صحیح بزرگ تر مساوی ۱، چند جمله ای است؛ پس پیوسته و مشتق پذیر هست. در نتیجه برای $x > a$ هم نقطه گوشه ای نداریم، بنابراین تنها نقطه ای که ممکن است گوشه ای باشد، $x = a$ است.

گام ۳ اگر $x = a$ بخواید برای f نقطه گوشه ای باشد، طبق درس نامه f باید در $x = a$ پیوسته باشد. حد چپ، راست و مقدار f در $x = a$ را حساب می کنیم، حواسمان هم هست که برای محاسبه حد راست و مقدار از ضابطه پایین و برای محاسبه حد چپ از ضابطه بالا استفاده می کنیم:

♦ **حد راست و مقدار**: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (b + (x-a)^m) = b + 0 = b$

♦ **حد چپ**: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (b) = b$

حالا سه مقدار بالا را مساوی هم می گذاریم:

$b = b + 0 = b \Rightarrow 0 = 0$

که چون $m \geq 1$ است، تساوی بالا همیشه برقرار است؛ پس تابع در $x = a$ پیوسته است.

گام ۴ حالا بباید $m \geq 1$ را به دو قسمت تقسیم کنیم:

♦ **m = 1**: در این حالت $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a) & x \geq a \end{cases}$ است. از این تابع مشتق

می گیریم و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ را حساب می کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x > a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 1 \end{cases}$$

همان طور که می بینید مشتق چپ و راست در این حالت هر دو موجود ولی نابرابرند؛ پس طبق درس نامه، در این حالت $x = a$ نقطه گوشه ای است. تا این جا یک مقدار برای m پیدا کردیم.

♦ **m ≥ 2**: در این حالت می توانیم m را خود ۲ در نظر بگیریم. این جوری

$$f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^2 & x \geq a \end{cases} \text{ است. باز هم مشتق می گیریم و } f'_-(a) \text{ و } f'_+(a)$$

$$\text{را حساب می کنیم: } f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 0 + 2(x-a) & x \geq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 2(a-a) = 0 \end{cases}$$

در این حالت مشتق چپ و راست هر دو موجود ولی برابرند؛ پس به ازای $m = 2$ نقطه گوشه ای نداریم. به ازای بقیه عددهای صحیح بزرگ تر از ۲ هم همین اتفاق می افتد؛ پس کلاً برای $m \geq 2$ نقطه گوشه ای نداریم، بنابراین در کل یک مقدار برای m پیدا شد.

۲۰- گزینه ۲

استراتژی ابتدا قدر مطلق را از بین ببرید و بعد تابع را به صورت چندضابطه ای بنویسید (حواستان به دامنه ضابطه ها باشد). سپس از f مشتق بگیرید و تعداد نقاط بحرانی و اکسترمم ها را محاسبه کنید.

درس نامه ۱ برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی به شکل $\sqrt{u}$ ، کافی است نامعادله $u \geq 0$ را حل کنید.

♦ **حد چپ و مقدار**: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = \sqrt{3^2 - 2(3) + 1} = \sqrt{4} = 2$

حالا حد چپ، راست و مقدار f در $x = 3$ را مساوی هم می گذاریم:

$$9a + 3b + 2 = 2 \Rightarrow 9a = -3b \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left[\frac{a}{b} \right] = -1$$

که خوشبختانه همین مقدار در ① حضور دارد.

۱۸- گزینه ۲

استراتژی چون $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) - 2g'(\frac{\sqrt{\pi}}{6})$ همان $(f-2g)'(\frac{\sqrt{\pi}}{6})$ است، پس اول $f-2g$ را می سازیم بعد از آن مشتق می گیریم.

درس نامه ۱ فرمول مشتق برخی از انواع توابع را در زیر ببینید: (k عددی ثابت است.)

تابع	فرمول مشتق
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$f + g$	$f' + g'$
kf	kf'

۲ برای ساده کردن نسبت های مثلثاتی « $\pi + \alpha$ » از جدول زیر کمک بگیرید:

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

گام ۱ طبق استراتژی اول تابع $(f-2g)(x)$ را می سازیم:

$$(f-2g)(x) = f(x) - 2g(x) = \frac{\lambda + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x} - 2\left(\frac{2}{2 - \cos x}\right)$$

صورت و مخرج کسر $\frac{2}{2 - \cos x}$ را در $2 + \cos x$ ضرب می کنیم تا با کسر $\frac{\lambda + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x}$ هم مخرج بشود:

$$(f-2g)(x) = \frac{\lambda + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x} - \frac{4}{\frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} \times \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x}} = \frac{\lambda + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x} - \frac{4}{4 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\lambda + \cos^2 x - 4}{4 - \cos^2 x} = \frac{\cos x (\cos^2 x - 4)}{4 - \cos^2 x} = -\cos x$$

$$(f-2g)(x) = -\cos x \quad (*)$$

پس: **گام ۲** حالا از طرفین تساوی (*) مشتق می گیریم:

$$(f-2g)'(x) = -(-\sin x) \Rightarrow f'(x) - 2g'(x) = \sin x$$

در تساوی بالا به جای x قرار می دهیم $\frac{\sqrt{\pi}}{6}$:

$$f'(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) - 2g'(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) = \sin \frac{\sqrt{\pi}}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \text{ هم طبق مورد (۲) درس نامه همان } -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \text{ است؛ پس:}$$

$$f'(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) - 2g'(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) = -\frac{1}{2}$$

مشاوره همیشه قبل از مشتق گرفتن تابعان را تا جای ممکن ساده کنید، این جوری سریع تر به جواب می رسید.

۱۹- گزینه ۴

درس نامه $x = a$ برای تابع f در دو حالت نقطه گوشه ای است:

(الف) f در $x = a$ پیوسته باشد. مشتق چپ و راست f در $x = a$ ، جفتشان موجود ولی نابرابر باشند.

(ب) f در $x = a$ پیوسته باشد. از بین مشتق چپ و راست f در $x = a$ ، یکی موجود و دیگری نامتناهی باشد.

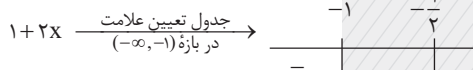
(چون رادیکال با فرجه ۲ است) و کافی است صورت را تعیین علامت کنیم:



علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر کرد؛ پس $x = \frac{1}{2}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است.

گام ۵ در بازه $(-\infty, -1]$ هم ضابطه تابع به صورت $\sqrt{x+x^2}$ و ضابطه مشتق آن به

صورت $\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$ است. مشابه حالت قبلی کافی است علامت $1+2x$ در بازه $(-\infty, -1)$ را به دست آوریم:



علامت مشتق همواره منفی است؛ پس در این بازه اکسترمم نسبی نداریم.

گام ۵ پس تابع فقط ۱ نقطه ماکزیمم نسبی و صفر نقطه مینیمم نسبی دارد، یعنی $m+n+k=1+0+4=5$ و $n=0$ و $m=1$ بنابراین:

۲۱- گزینه ۴

گام ۵ به صف ۶ کتاب فکر کنید. در چه حالت‌هایی تعداد کتب بالای ریاضی از پایین آن بیشتر است؟

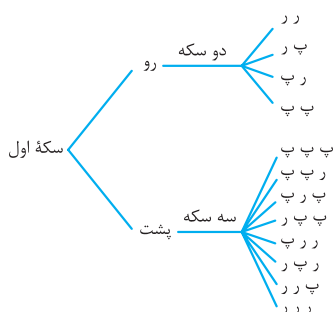
x	x	x
x	x	x
x	x	x
x	x	ریاضی
x	ریاضی	x
ریاضی	x	x

اول یا دوم یا سوم باشد، این‌طوری:

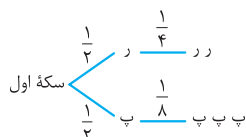
گام ۵ پس جای ریاضی ۳ حالت و پنج کتاب دیگر ۵! حالت دارند؛ بنابراین جواب طبق اصل ضرب $3 \times 5! = 360$ است.

۲۲- گزینه ۲

گام ۵ نمودار درختی را ببینید:



گام ۵ شاخه‌های مورد نظر که تمام سکه‌ها یکسان باشند، عبارت‌اند از:



گام ۵ با استفاده از قانون جمع احتمال جواب را حساب می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

۲۳- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ واریانس n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ و میانگین $\bar{x}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ هروقت از بین تعدادی داده یکی از آن‌ها را حذف کنیم ولی هم‌چنان میانگین داده‌ها تغییری نکند، آن عدد حذف‌شده حتماً با میانگین برابر است.

گام ۵ چون تنها داده متفاوت بین دو دسته a است، می‌توانیم دسته اول را به صورت b, c, d, e, f و دسته دوم را به صورت a, b, c, d, e, f در نظر بگیریم.

۲ به سه دسته از نقاط یک تابع، نقطه بحرانی می‌گوییم:

الف) نقاط سر و ته بازه‌های بسته

ب) نقاط مشتق‌ناپذیر

پ) نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر است ولی مشتق در آن‌ها برابر صفر است.

۳ برای پیدا کردن نقاط بحرانی توابع رادیکالی به شکل $y = \sqrt{u}$ به این صورت عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم. حالا (همان‌طور که در مورد ۲ هم گفتیم) نقاط سر و ته بازه‌های بسته، بحرانی هستند.

ب) سپس از تابع مشتق می‌گیریم. حالا ریشه‌هایی از صورت و مخرج مشتق که در دامنه هستند هم بحرانی می‌شوند.

۴ برای پیدا کردن اکسترمم‌های نسبی یک تابع، ابتدا از آن مشتق می‌گیریم و سپس تعیین علامت می‌کنیم. حالا هر جا که علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر کرد ماکزیمم نسبی و هر جا که علامت مشتق از منفی به مثبت تغییر کرد مینیمم نسبی داریم. برای مثال اگر جدول تعیین علامت مشتق یک تابع به صورت زیر باشد، داریم:

a	b	c	d
+	+	-	-
↗	↗	↘	↘
	max نسبی		min نسبی

گام ۵ ابتدا f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \sqrt{x(1-|x|)} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(1-x)} & x \geq 0 \\ \sqrt{x(1+x)} & x < 0 \end{cases}$$

گام ۵ حالا دامنه هر ضابطه را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ - \quad + \quad - \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با } x \geq 0} x \in [0, 1]$$

$$\sqrt{x(1+x)} \Rightarrow x(1+x) \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{c} -1 \quad 0 \\ + \quad - \quad + \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با } x < 0} x \in (-\infty, -1]$$

پس ضابطه f به این صورت شد:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(1-x)} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x(1+x)} & x \leq -1 \end{cases}$$

گام ۵ اول به دنبال نقاط بحرانی می‌گردیم.

$\{ -1, 0, 1 \}$ که طول نقاط بحرانی‌اند، چون سر و ته بازه بسته هستند. حالا از هر ضابطه هم مشتق می‌گیریم و صورت و مخرج آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول مابقی نقاط بحرانی به دست آید:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+x^2} & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x-x^2} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} & \text{ریشه صورت} \\ x = 0, 1 & \text{ریشه‌های مخرج} \end{cases}$$

$$\sqrt{x+x^2} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} & \text{ریشه صورت} \\ x = 0, -1 & \text{ریشه‌های مخرج} \end{cases}$$

اما دقت کنید $x = -\frac{1}{2}$ غیر قابل قبول است، چون دامنه $\sqrt{x+x^2}$ برابر $x \leq -1$ بود؛ بنابراین در کل طول نقاط بحرانی برابر $\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ است، یعنی تابع ۴ نقطه بحرانی دارد و $k=4$ می‌شود.

گام ۵ حالا مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم تا طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی هم به دست آیند. دقت کنید همان‌طور که در گام ۳ دیدیم، در بازه $[0, 1]$ ضابطه تابع به صورت $\sqrt{x-x^2}$ و ضابطه مشتق آن به صورت $\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$ است.

برای تعیین علامت $\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$ در بازه $(0, 1)$ توجه کنید که مخرج همواره مثبت است

گام ۷ به گفته سوال، میانگین دو دسته برابرند. این یعنی حذف داده a تأثیری روی میانگین نمی‌گذارد؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه میانگین هر دو دسته برابر همان داده حذف‌شده، یعنی a است.

گام ۸ فرمول واریانس برای دو دسته را می‌نویسیم. حواسمان هم هست که برای هر دو دسته $\bar{x} = a$ شد:

۲۵- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ در متوازی‌الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند و برعکس، یعنی اگر در یک چهارضلعی قطرهای همدیگر را نصف کنند، حتماً آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲ هر وقت دو ضلع از مثلث مساوی باشند، می‌توانیم بگوییم:

- اندازه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع برابرند.
- اندازه میانه‌های وارد بر آن دو ضلع برابرند.
- اندازه نیمسازهای وارد بر آن دو ضلع برابرند.

۳ نیمسازهای داخلی هر مثلث مطابق شکل در یک نقطه (I) هم‌رس‌اند.

۴ در دوزنقه متساوی‌الساقین قطرهای برابرند. در حالت خاص این قطرهای می‌توانند مثلث متساوی‌الساقین را برهم عمود هم باشند:

وقتی می‌توانیم مثال نقض ارائه کنیم که گزاره غلط باشد. پس سؤال در واقع پرسیده کدام گزاره غلط است.

از درستی (۱)، (۲) و (۴) طبق درس‌نامه مطمئن هستیم. اما طبق مورد (۴) درس‌نامه، دوزنقه متساوی‌الساقین مقابل، مثال نقض (۳) است. همان‌طور که می‌بینید قطرهای چهارضلعی برابر و برهم عمودند اما مربع نیست؛ پس این گزاره نادرست است و مثال نقض دارد.

۲۶- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ دو مثلث قائم‌الزاویه با وترهای عمود بر هم، همیشه متشابه‌اند. مثلاً در شکل مقابل مثلث‌های ABH و BCH' با زاویه‌های α و β با هم متشابه‌اند.

۲ برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل مقابل برابر می‌شود با:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

رو به θ رو به β رو به α

گام ۱ تشخیص مثلث‌های متشابه: به مثلث‌های قائم‌الزاویه رنگی شکل مقابل نگاه کنید. وترهایشان بر هم عمودند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم با هم مشابه‌اند.

گام ۲ نوشتن نسبت تشابه: مطابق شکل بالا طول BE را x و BF را y در نظر می‌گیریم. حالا به کمک مورد (۲) درس‌نامه، نسبت تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه رنگی را می‌نویسیم:

$$\frac{FC}{BE} = \frac{DC}{BF} = \frac{DF}{EF} \Rightarrow \frac{FC}{x} = \frac{DC}{y} = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} FC = 4x \\ DC = 4y \end{cases}$$

رو به β رو به α رو به 90°

گام ۳ پیدا کردن رابطه بین x^2 و y^2 : اطلاعات بالا را روی شکل گام (۱) می‌نویسیم تا به شکل مقابل برسیم.

گام ۴ به گفته سوال، میانگین دو دسته برابرند. این یعنی حذف داده a تأثیری روی میانگین نمی‌گذارد؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه میانگین هر دو دسته برابر همان داده حذف‌شده، یعنی a است.

گام ۵ فرمول واریانس برای دو دسته را می‌نویسیم. حواسمان هم هست که برای هر دو دسته $\bar{x} = a$ شد:

$$\sigma_1^2 = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + \dots + (f-a)^2}{5} \quad (I)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(a-a)^2 + (b-a)^2 + (c-a)^2 + \dots + (f-a)^2}{6} \quad (II)$$

تنها اختلاف صورت کسره‌های بالا $(a-a)^2 = 0$ است؛ پس صورت دو کسر یکسان‌اند. جفتشان را A در نظر می‌گیریم و روابط (I) و (II) را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\frac{A}{5}}{\frac{A}{6}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \sigma_1^2 = \frac{6}{5} \sigma_2^2$$

و داریم:

گام ۶ سؤال گفته $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3}$. طبق تساوی بالا می‌توانیم به جای σ_1^2 بنویسیم:

$$\frac{6}{5} \sigma_2^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} \sigma_2^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \sigma_2^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow \sigma_1^2 = \frac{10}{3} \times \frac{6}{5} = 4$$

البته می‌توانستیم $\sigma_2^2 = \frac{10}{3}$ را در $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3}$ هم جای‌گذاری کنیم تا به σ_1^2 برسیم:

$$\sigma_1^2 = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

پس واریانس دسته اول ۴ است.

۲۴- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای باشند، احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط رخ دادن پیشامد B را به صورت $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم. از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

۲ $P(A')$ و $P(A'|B)$ به صورت زیر باز می‌شوند:

$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

شفاف‌سازی ۱ «وضعیت گل شدن دو پنالتی متفاوت است»، یعنی یا اولی گل شود و دومی خراب یا اولی خراب شود و دومی گل.

۲ «با احتمال ۶۰ درصد پنالتی اول را گل می‌کند، در این صورت احتمال گل شدن پنالتی دوم ۸۰ درصد و در غیر این صورت ۳۰ درصد است.» یعنی:

$$P(\text{اولی گل} | \text{دومی گل}) = 0/8, \quad P(\text{اولی خراب} | \text{دومی گل}) = 0/3$$

گام ۱ گل شدن پنالتی اول را پیشامد A و گل شدن پنالتی دوم را پیشامد B در نظر می‌گیریم. طبق «مورد (۱) شفاف‌سازی»، احتمال مورد نظر جمع احتمال دو حالت است، یعنی:

$$P = P(\text{دومی گل} \cap \text{اولی خراب}) + P(\text{دومی گل} \cap \text{اولی گل})$$

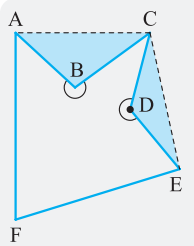
$$= P(A \cap B') + P(A' \cap B) \quad (*)$$

گام ۲ طبق مورد (۲) «شفاف‌سازی» و مورد (۱) و (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} P(\text{اولی خراب} | \text{دومی گل}) = 0/3 \Rightarrow 0/3 = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} \quad (1) \\ P(\text{اولی گل} | \text{دومی گل}) = 0/8 \Rightarrow P(B'|A) = 1 - P(B|A) \\ \Rightarrow \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = 1 - 0/8 \quad (2) \end{cases}$$

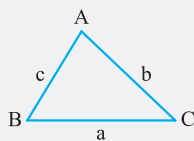
گام ۳ به گفته سؤال احتمال گل شدن پنالتی اول ۶۰ درصد است، این یعنی $P(A) = 0/6$ و در نتیجه $P(A') = 1 - 0/6 = 0/4$ است. این موارد را در رابطه‌های (۱) و (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} 0/3 = \frac{P(B \cap A')}{0/4} \Rightarrow P(B \cap A') = 0/12 \\ \frac{P(B' \cap A)}{0/6} = 1 - 0/8 \Rightarrow P(B' \cap A) = 0/12 \end{cases}$$



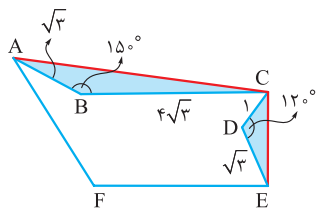
♦ میزان افزایش مساحت، دو برابر قسمت‌های رنگی بالا است، یعنی:

$$2S_{ABC} + 2S_{CDE} = \text{میزان افزایش مساحت}$$



۲) مساحت هر مثلث را می‌توانیم از رابطه «سینوس زاویه بین همان دو ضلع × نصف حاصل ضرب دو ضلع» $S =$ به دست بیاوریم، این یعنی برای مساحت مثلث مقابل، می‌توانیم رابطه‌های زیر را بنویسیم:

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \hat{A} \text{ یا } \frac{1}{2}ac \cdot \sin \hat{B} \text{ یا } \frac{1}{2}ab \cdot \sin \hat{C}$$



کام ۱ تشخیص میزان افزایش مساحت: طبق مورد (۱) درس‌نامه، میزان افزایش مساحت چندضلعی ABCDEF، به شرط ثابت ماندن محیط و تعداد اضلاعش، دو برابر مساحت مثلث‌های رنگی است، یعنی:

$$2S_{ABC} + 2S_{CDE} = \text{میزان افزایش مساحت} (*)$$

کام ۲ محاسبه میزان افزایش مساحت: در ادامه به کمک مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مثلث‌های ABC و CDE را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})(4\sqrt{3})\sin 150^\circ = \frac{1}{2}(4 \times 3) = 3 \\ S_{CDE} = \frac{1}{2}(1)(\sqrt{3})\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

در آخر موارد بالا را در تساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم تا به خواسته سؤال برسیم:

$$\text{میزان افزایش مساحت} = 2(3) + 2\left(\frac{3}{4}\right) = 6 + \frac{3}{2} = 6 + 1\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$$

۳۲ - گزینه ۲

درس‌نامه ۱ وارون ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۲) وارون وارون هر ماتریس می‌شود خود همان ماتریس، یعنی:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

۳) طرفین یک تساوی ماتریسی مثل $B = C$ را می‌توانیم در ماتریس دلخواه A ضرب کنیم. فقط باید حواسمان باشد A را از یک سمت ضرب کنیم، یا از چپ تا به تساوی $AB = AC$ یا از راست تا به تساوی $BA = CA$ برسیم.

$$2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

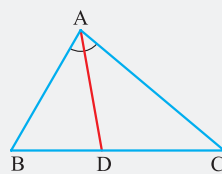
را از سمت چپ در A ضرب می‌کنیم تا خواسته سؤال یعنی $2A - 3B^{-1}$ را بسازیم:

$$A(2I - 3A^{-1}B^{-1}) = A \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A - 3 \underbrace{AA^{-1}}_I B^{-1} = A \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A - 3B^{-1} = A \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (*)$$

طبق رابطه بالا، برای محاسبه خواسته سؤال ماتریس A را لازم داریم.

ب) نیمسازهای سبزرنگ بر هم عمودند، این یعنی مثلث PMQ قائم‌الزاویه است. ۲) نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع کناری‌اش قطع می‌کند، این یعنی اگر در شکل مقابل AD نیمساز باشد، می‌توانیم بنویسیم:

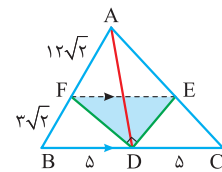


$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

برای محاسبه طول این نیمساز هم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

کام ۱ رسم شکل مناسب و تحلیل آن، شکل مسئله به صورت مقابل است.



همان‌طور که می‌بینید، طبق مورد (۱) درس‌نامه، این همان شکل مهم کتاب درسی است که در آن مثلث رنگی قائم‌الزاویه و $EF \parallel BC$ بود.

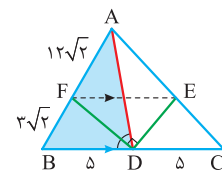
به گفته سؤال $BC = 10$ است؛ پس چون D وسط BC است، $BD = DC = \frac{10}{2} = 5$ می‌شود.

کام ۲ محاسبه طول EF، در مثلث ABC، EF موازی با BC شد؛ پس می‌توانیم در این مثلث تالس جزء به کل بنویسیم تا به طول پاره خط EF برسیم:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{12\sqrt{2} + 3\sqrt{2}} = \frac{EF}{10} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{15\sqrt{2}} = \frac{EF}{10} \Rightarrow EF = 8$$

$$\Rightarrow EF = 2 \times \frac{12}{3} = 2 \times 4 = 8$$

کام ۳ محاسبه طول AM، خوب به مثلث رنگی زیر نگاه کنید. در این مثلث DF نیمساز است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{AF}{FB} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{AD}{5} \Rightarrow AD = 20$$

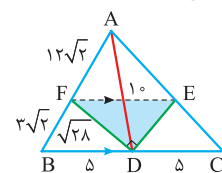
حالا که طول AM را داریم می‌توانیم به کمک رابطه طول نیمساز که در مورد (۲) درس‌نامه

گفتیم، طول نیمساز MF را حساب کنیم:

$$DF^2 = \frac{AD}{DB} \cdot DB - AF \cdot FB$$

$$\Rightarrow DF^2 = \frac{AD}{DB} \cdot DB - AF \cdot FB = \frac{20}{5} \cdot 5 - (12\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 100 - 72 = 28 \Rightarrow DF = \sqrt{28}$$

کام ۴ محاسبه خواسته سؤال، در آخر به مثلث قائم‌الزاویه رنگی زیر نگاه کنید. در این

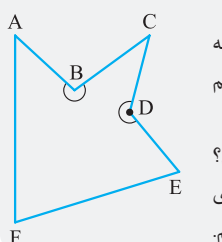


مثلث طول EF و DF را داریم؛ پس می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس طول DE را هم به دست بیاوریم:

$$DF^2 + DE^2 = EF^2 \Rightarrow (\sqrt{28})^2 + DE^2 = 8^2 \Rightarrow DE^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow DE = \sqrt{36} = 6$$

۳۱ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ به شش ضلعی زیر که بعضی از زاویه‌های داخلی‌اش ($\hat{D}$ و $\hat{B}$) بیشتر از 180° است، نگاه کنید.



مساحت این جور چندضلعی‌ها را می‌توانیم زیاد کنیم؛ جوری که محیط‌شان تغییری نکنند. برای این‌که بفهمیم چه قدر می‌توانیم مساحت را زیاد کنیم، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

♦ در کدام رأس‌های چندضلعی، زاویه بیشتر از 180° داریم؟ B و D؛ رأس‌های کنار B، یعنی A و C و همین‌طور رأس‌های کنار D، یعنی C و E را مثل شکل بالا به هم وصل می‌کنیم.

گام ۳ محاسبه پارامتر سهمی: به کمک مورد (۳) درس‌نامه، پارامتر سهمی

ضرب متغیر درجه ۱
 $3y^2 - 3x - ay = 0$ را به دست می‌آوریم؛ فقط چون در معادله سهمی a داریم، پارامتر
 ضرب متغیر درجه ۲

سهمی را با A نشان می‌دهیم:

$$A = -\frac{\text{ضرب متغیر درجه ۱}}{\text{ضرب متغیر درجه ۲}} = -\frac{-3}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

گام ۴ نوشتن معادله خط هادی بر حسب A : طبق مورد (۴) سهمی معادله خط هادی را

باید به این صورت بنویسیم:

$$x = -A - \text{طول رأس} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{36} - \frac{1}{4}$$

گام ۵ محاسبه خواسته سؤال: سؤال معادله خط هادی را به صورت $x = -\frac{a^2}{4}$ داده. از مقایسه این معادله با معادله آبی‌رنگ بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$-\frac{a^2}{36} - \frac{1}{4} = -\frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{36} = -\frac{a^2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{36} = \frac{1-a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

سؤال اختلاف مقادیر a را می‌خواهد که می‌شود $12 - (-6) = 18$.

گام ۵ محاسبه درایه‌های A : وارون ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ را به کمک مورد (۱)

درس‌نامه به دست می‌آوریم تا به خود A برسیم (مورد (۲) درس‌نامه):

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{(4)(-\frac{1}{4}) - (1)(-1)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

گام ۶ محاسبه خواسته سؤال: حالا ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ را در تساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

قطر اصلی

$$2A - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

سؤال جمع درایه‌های قطر اصلی ماتریس بالا را می‌خواهد که می‌شود $-2 + 0 = -2$.

۳۵- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ هر وقت وسط ضلع‌های یک مثلث مثل شکل مقابل را به هم وصل کنیم، ۴ مثلث هم‌نهشت درست می‌شود، این یعنی مساحت مثلث MNP ، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC است.

۲ اگر مطابق شکل روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یک مثلث بسازیم، مساحتش برابر می‌شود با:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

۳ ضرب خارجی بردارهای $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

منفی یادت‌نره

۴ اگر A و B مختصات ابتدا و انتهای بردار $\vec{AB}$ باشند، مؤلفه‌های این بردار را می‌توانیم به کمک رابطه مقابل به دست بیاوریم:

ابتدا انتها
 $\vec{AB} = B - A$

۵ طول بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

۶ فاصله نقطه‌های $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

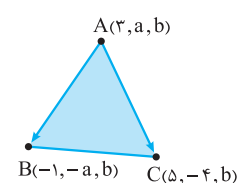
گام ۵ محاسبه مساحت مثلث ABC : به گفته سؤال A ، B و C وسط اضلاع یک مثلث به

مساحت ۶۴ هستند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، مساحت مثلث ABC می‌شود:

$$S_{ABC} = \frac{1}{4} \times 64 = 16$$

گام ۶ محاسبه برداری مساحت: اول شکل فرضی مقابل

را می‌کشیم. به کمک مورد (۴) درس‌نامه، بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} \vec{AB} = B - A = (-1, -a, b) - (3, a, b) = (-4, -2a, 0) \\ \vec{AC} = C - A = (5, -4, b) - (3, a, b) = (2, -4-a, 0) \end{cases}$$

۳۲- گزینه ۴

گام ۵ محاسبه A^2 : اول A را در خودش ضرب می‌کنیم تا به A^2 برسیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام ۶ محاسبه خواسته سؤال: همان‌طور که می‌بینید، مجموع درایه‌های A^2 برابر $6 = 1+1+2+1+1+1$ و مجموع درایه‌های A برابر $2 = 1-2-1$ است؛ پس نسبتشان می‌شود $3 = \frac{6}{2}$.

۳۴- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ در معادله گسترده سهمی، اگر نسبت به متغیر درجه دوم مشتق بگیریم، یا عرض رأس پیدا می‌شود یا طولش. احتمالاً می‌پرسید «چطور تشخیص بدهیم؟» باید خدمتتان عرض کنیم که اگر متغیر درجه دوم x بود طول رأس و اگر متغیر درجه دوم y بود، عرض رأس پیدا شده است.

۲ مختصات رأس سهمی در معادله‌اش صدق می‌کند.

۳ هر وقت معادله گسترده سهمی را داشتید و مقدار پارامتر آن یعنی a را می‌خواستید، از رابطه مقابل استفاده کنید:

$$a = -\frac{\text{ضرب متغیر درجه ۱}}{\text{ضرب متغیر درجه ۲}} \times 4$$

منفی یادت‌نره

۴ اگر در سهمی y^2 وجود داشته باشد، سهمی افقی است. در این‌جور سهمی‌ها معادله خط هادی از این رابطه به دست می‌آید:

پارامتر سهمی
 $x = -\frac{a}{\text{طول رأس}}$

گام ۵ پیدا کردن طول رأس سهمی: در معادله گسترده سهمی y^2 داریم، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، اگر نسبت به y مشتق بگیریم، عرض رأس سهمی پیدا می‌شود:

$$3y^2 - 3x - ay = 0 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} 6y - a = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{6}$$

حالا $y = \frac{a}{6}$ را در معادله سهمی جای‌گذاری می‌کنیم تا به طول رأس سهمی برسیم (مورد (۲) درس‌نامه):

$$3\left(\frac{a}{6}\right)^2 - 3x - a\left(\frac{a}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{12} - 3x - \frac{a^2}{6} = 0$$

$$3x = \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{6} \Rightarrow 3x = -\frac{a^2}{12} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{36}$$

طول رأس

♦ یکی از آن‌ها مضرب ۲ و دیگری مضرب ۵ باشد؛ مثلاً اگر ۱۲ کوچک‌ترین عضو باشد، بزرگ‌ترین عضو باید ۱۵ یا ۲۵ باشد. باید همه حالت‌های ممکن را پیدا کنیم. برای این کار اعضای مجموعه $\{12, 13, 15, 18, 23, 24, 25, 26\}$ را به صورت زیر می‌نویسیم و برای هر عضو از خودمان می‌پرسیم اگر این عدد کوچک‌ترین عضو باشد، بزرگ‌ترین کدام عددها می‌تواند باشند؟ آن‌ها را با فلش به هم وصل می‌کنیم، ببینید:



کام ۱ با توجه به فلش‌های بالا، مجموعه‌ها را می‌توانیم به ۸ حالت زیر تقسیم کنیم:

(۱)	(۲)
می‌تواند باشد یا نباشد. $\{12, 13, 15\}$	می‌تواند باشد یا نباشد. $\{12, 13, 15, 18, 23, 24, 25\}$
(۳)	(۴)
عضوی بیش‌از وجود ندارد. $\{15, 18, 24\}$	می‌تواند باشد یا نباشد. $\{15, 18, 23, 24\}$
(۵)	(۶)
می‌تواند باشد یا نباشد. $\{15, 18, 23, 24, 25, 26\}$	می‌تواند باشد یا نباشد. $\{18, 23, 24, 25\}$
(۷)	(۸)
عضوی بیش‌از وجود ندارد. $\{24, 25\}$	عضوی بیش‌از وجود ندارد. $\{25, 26\}$

کام ۲ حالا تعداد زیرمجموعه‌ها را در هر یک از ۸ حالت بالا به دست می‌آوریم:

♦ حالت (۱): در این حالت ۱۲ و ۱۵ در زیرمجموعه هستند، اما ۱۳ دو حالت دارد یا هست یا نیست، پس تعداد زیرمجموعه‌های این حالت ۲ تا است.

♦ حالت (۲): در این حالت ۱۲ و ۲۵ که در زیرمجموعه هستند، اما هر کدام از ۵ عدد $\{13, 15, 18, 23, 24\}$ دو حالت دارند یا هستند یا نیستند؛ پس تعداد زیرمجموعه‌های این حالت برابر « $2^5 = 32$ » تا است.

♦ بقیه حالت‌ها: همین‌جور اگر پیش برویم، تعداد زیرمجموعه‌های مربوط به حالت‌های (۳) تا (۸) به ترتیب برابر $2^2, 2^2, 2^2, 2^2, 2^2, 2^2$ هستند؛ بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌ها می‌شود:

$$2 + 32 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 44$$

۳۸ - گزینه ۴

♦ درس‌نامه ۱ معادله سیاله $ax + by = c$ به شرطی جواب دارد که ب.م.م. ضرایب c را عاد کند؛ یعنی:

۲ هر وقت سمت راست یک بخش‌پذیری، عبارتی پارامتری و سمت چپ یک عدد معلوم بود، بخش‌پذیری را به هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم. مثلاً بخش‌پذیری $53 \mid 7n + 1$ را این‌جوری به هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم:

۳ هر هم‌نهشتی مثل $a \equiv b \pmod{m}$ را به این صورت می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم:

کام ۱ طبق مورد (۱) درس‌نامه، معادله $57x + 133y = 22n - 1$ به شرطی جواب دارد که $(57, 133) \mid 22n - 1$.

به این صورت شد:

کام ۲ سمت راست بخش‌پذیری بالا یک عبارت پارامتری و سمت چپ عدد معلوم ۱۹ است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه اول آن را به هم‌نهشتی تبدیل کرده، بعد معادله هم‌نهشتی را حل می‌کنیم:

$$3n \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow 3n \equiv 39 \pmod{19} \Rightarrow n \equiv 13 \pmod{19} \Rightarrow n = 19k + 13$$

حالا می‌توانیم به کمک مورد (۳) درس‌نامه، $\overline{AB} \times \overline{AC}$ را به دست بیاوریم:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ -4-a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2a \\ 2 & -4-a \end{pmatrix} = (0, 0, 16 + 8a)$$

در آخر مساحت را به کمک مورد‌های (۲) و (۵) درس‌نامه به دست می‌آوریم و مساوی ۱۶ می‌گذاریم:

$$\frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 0^2 + (16 + 8a)^2} = 16 \Rightarrow |16 + 8a| = 32$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 + 8a = 32 \Rightarrow 8a = 16 \Rightarrow a = 2 \\ 16 + 8a = -32 \Rightarrow 8a = -48 \Rightarrow a = -6 \end{cases}$$

کام ۲ محاسبه خواسته سؤال: سؤال طول ضلع AB یا همان طول بردار $\overline{AB}$ را می‌خواهد.

دیدیم که $\overline{AB} = (-4, -2a, 0)$ شد، طول این بردار را به ازای هر دو مقدار $a = 2$ و $a = -6$ حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a = 2: \overline{AB} &= (-4, -4, 0) \\ \Rightarrow |\overline{AB}| &= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2} \\ a = -6: \overline{AB} &= (-4, 12, 0) \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{4^2(1 + 3^2)} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

هم $4\sqrt{10}$ در ۲ و $4\sqrt{2}$ در ۳ حضور دارد؛ پس این سؤال دو گزینه صحیح دارد. اما متأسفانه سازمان سنجش فقط ۳ را به عنوان جواب اعلام کرده است!

۳۶ - گزینه ۲

♦ درس‌نامه ۱ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر m برابر r باشد، می‌توانیم بنویسیم:

۲ اگر طرفین یک هم‌نهشتی به پیمانه m ، بر عددی صحیح مثل $a \neq 0$ بخش‌پذیر باشند، می‌توانیم a را از طرفین هم‌نهشتی بزنیم، اما باید حواسمان باشد که پیمانه (m) را هم بر تقسیم کنیم، یعنی:

$$a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{d=(a,m)} b \equiv c \pmod{\frac{m}{d}}$$

۳ در هم‌نهشتی می‌توانیم مضارب مختلف پیمانه را به طرفین هم‌نهشتی اضافه یا کم کنیم. این‌جوری می‌توانیم اعداد داخل هم‌نهشتی را کوچک یا بزرگ کنیم:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \pm mk \equiv b \pm mk \pmod{m}$$

کام ۱ به گفته سؤال باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۳ برابر ۵ است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$a \equiv 5 \pmod{23}$$

کام ۲ از طرفی سؤال می‌گوید a مضرب ۸ است، پس در هم‌نهشتی بالا به جای a می‌نویسیم $8k$:

$$8k \equiv 5 \pmod{23}$$

کام ۳ باقی‌مانده تقسیم $\frac{8k}{4} = 2k$ بر ۲۳ را می‌خواهیم، به همین خاطر باید سعی کنیم طرفین هم‌نهشتی بالا را بر ۴ تقسیم کنیم. برای این کار از مورد‌های (۲) و (۳) درس‌نامه کمک می‌گیریم:

$$8k \equiv 5 \pmod{23} \xrightarrow{\div 4} 2k \equiv 7 \pmod{(4, 23)=1}$$

از هم‌نهشتی بالا نتیجه می‌گیریم که باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{4} = 2k$ بر ۲۳ برابر ۷ است.

کام ۴ تیزبازی سعی می‌کنیم عددی پیدا کنیم که شرایط مسئله را داشته باشد، یعنی مضرب ۸ باشد و باقی‌مانده‌اش بر ۲۳ هم ۵ باشد. عدد $a = 28$ این ویژگی‌ها را دارد.

باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{4} = 7$ بر ۲۳ می‌خواهیم که ۷ است.

۳۷ - گزینه ۳

کام ۱ حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو در دو حالت مضرب ۱۰ می‌شود:

♦ یکی از آن‌ها مضرب ۱۰ باشد، همچنین عضوی در $\{12, 13, 15, 18, 23, 24, 25, 26\}$ نداریم؛ پس این حالت امکان‌پذیر نیست.

فیزیک

۴۱- گزینه ۲

درس نامه در پرتوهای طبیعی، سه نوع پرتو ایجاد می‌شود: ۱ پرتوهای آلفا (α)
۲ پرتوهای بتا (β) ۳ پرتوهای گاما (γ)
پرتوهای آلفا (α): کم‌ترین نفوذ را دارند و با ورقه نازک سربی با ضخامت حدود 0.1 mm متوقف می‌شوند.
پرتوهای بتا (β): نسبت به پرتوهای آلفا نفوذ بیشتری دارند و تا حدود 1 mm در ورقه سربی نفوذ می‌کنند.
پرتوهای گاما (γ): بیشترین نفوذ را دارند و می‌توانند از ورقه سربی با ضخامت 100 mm عبور کنند.

مقایسه قدرت نفوذ: α (آلفا) β (بتا) γ (گاما)

مقایسه قدرت نفوذ سه نوع ذره آلفا (α)، بتا (β) و گاما (γ) به صورت زیر است:
 $\gamma > \beta > \alpha$

طراح از ما می‌خواهد، گزینه‌ای را انتخاب کنیم که قدرت نفوذ ذرات به ترتیب از راست به چپ بیشتر شود؛ یعنی:

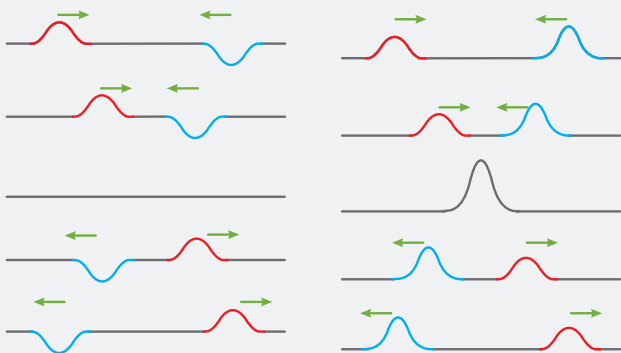
آلفا، بتا و گاما
افزایش قدرت نفوذ

تله اگر عجله کنید و به فعل «می‌شود» توجه نکنید و بلافاصله با دیدن گاما در ابتدای «۳»، این گزینه را انتخاب کنید، از این تست ساده نمره منفی می‌گیرید.

مشاوره این سؤال از متن کتاب درسی طراحی شده و رویکرد طراح به کتاب درسی در این آزمون، کاملاً مشهود است. در ادامه با سؤالاتی که از کتاب درسی طراحی شده‌اند، روبه‌رو می‌شوید.

۴۲- گزینه ۳

درس نامه وقتی دو یا چند موج هم‌زمان از یک منطقه عبور می‌کنند، با یکدیگر ترکیب می‌شوند که به آن تداخل می‌گوییم. شکل‌های «الف» و «ب» زیر، عکس‌های دو تپ را در چند لحظه‌های متوالی که در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند، نشان می‌دهد. تپ‌ها در شکل «الف» هنگام همپوشانی، تپ بزرگ‌تری را ایجاد کرده‌اند که به آن تداخل سازنده می‌گوییم، اما همان‌طور که در شکل «ب» می‌بینید، تپ‌ها هنگام همپوشانی، اثر یکدیگر را حذف کرده‌اند که به آن تداخل ویرانگر می‌گوییم. توجه کنید که تپ‌ها یا موج‌هایی که همپوشانی می‌کنند، شکل و حرکت یکدیگر را تغییر نمی‌دهند و پس از همپوشانی، بدون تغییر شکل در همان جهت حرکت اولیه خود، ادامه مسیر می‌دهند.



ب) تداخل ویرانگر

الف) تداخل سازنده

با توجه به درس‌نامه، در تداخل دو تپ در طناب «الف»، تداخل ویرانگر و در طناب «ب»، تداخل سازنده ایجاد می‌شود و بعد از همپوشانی، هر تپ در جهت حرکت اولیه، ادامه مسیر می‌دهد.

مشاوره حتماً شما هم می‌دانید که این سؤال از شکل و متن کتاب درسی طراحی شده است و اگر حتی یک بار کتاب درسی را ورق می‌زدید، این سؤال را قبل از آزمون می‌دیدید!

گام ۱ کم‌ترین عدد دورقمی n به ازای $k = 0$ به دست می‌آید:

$$n = 19(0) + 13 = 13$$

که جمع ارقامش می‌شود $1 + 3 = 4$.

۳۹- گزینه ۲

درس نامه در مسائل اصل لانه کیبورتی وقتی می‌خواهیم مطمئن باشیم اتفاق خاصی رخ می‌دهد بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم. یعنی مثلاً ابتدا تمام اعدادی که نمی‌خواهیم باشند را انتخاب می‌کنیم و بعد سراغ اعداد مطلوب می‌رویم.

گام ۱ در بدشانس‌ترین حالت اعداد: $15, 14, 18, 17, 20, 21, 23, 24, 26, 27$
را بیرون می‌آوریم و هیچ سه عدد متوالی نداریم.

گام ۲ تا این‌جا ۱۰ عدد برداشتیم و هیچ ۳ عدد متوالی‌ای نداریم. اما به محض این‌که یازدهمین را برداریم، یکی از اعداد $19, 22, 25, 28$ به ۱۰ عدد قبلی اضافه می‌شود و حتماً سه عدد متوالی داریم؛ پس ۱۱ عضو لازم است.

۴۰- گزینه ۲

درس نامه ۱ بزرگ‌ترین عدد در بین درجه رأس‌های گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترینش را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

۲ فرض کنید G یک گراف از مرتبه p باشد، در این صورت بین $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ و همین‌طور $\Delta(\bar{G})$ و $\delta(\bar{G})$ رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1 \quad \text{و} \quad \Delta(\bar{G}) + \delta(G) = p - 1$$

۳ گراف G با $\Delta(G)$ حداقل مرتبه‌اش برابر $p - 1$ است.

۴ در گراف کامل K_p ، درجه همه رأس‌ها « $p - 1$ » و تعداد یال‌ها « $\frac{p(p-1)}{2}$ » است.

گام ۱ طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \Delta(\bar{G}) + \delta(G) = p - 1 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = p - 1 - \delta(G) (*) \\ \Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1 \Rightarrow \delta(\bar{G}) = p - 1 - \Delta(G) (***) \end{cases}$$

گام ۲ طرفین رابطه‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = (p - 1 - \delta(G)) - (p - 1 - \Delta(G))$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = \Delta(G) - \delta(G)$$

به گفته سؤال $\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = 2$ است، پس تساوی بالا به این صورت درمی‌آید:

$$\Delta(G) - \delta(G) = 2$$

گام ۳ معادله بالا به همراه شرط $\Delta(G) + 2\delta(G) = 17$ در دستگاه دو معادله و دو مجهول، جواب‌های $\delta(G) = 5$ و $\Delta(G) = 7$ را می‌دهد.

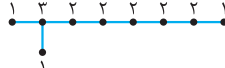
گام ۴ به گفته سؤال، $\bar{G}$ همبند است، پس $\delta(\bar{G}) \geq 1$ می‌شود، بنابراین طبق (***) می‌توانیم بنویسیم:

$$p - 1 - \Delta(G) \geq 1 \Rightarrow p - 8 \geq 1 \Rightarrow p \geq 9 \Rightarrow p_{\min} = 9$$

گام ۵ حالا به ازای $p = 9$ ، $\delta(G) = 5$ و مقدار $\Delta(\bar{G})$ و $\delta(\bar{G})$ را به کمک رابطه‌های (*) و (***) به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \Delta(\bar{G}) = 9 - 1 - 5 = 3 \\ \delta(\bar{G}) = 9 - 1 - 7 = 1 \end{cases}$$

گام ۶ می‌خواهیم تعداد یال‌های G، بیشترین باشد، پس $\bar{G}$ باید کم‌ترین تعداد یال را داشته باشد. بنابراین سعی می‌کنیم گرافی با ۹ رأس، ماکزیمم درجه ۳ و کم‌ترین درجه ۱ بکشیم به طوری که همبند هم باشد. این گراف به صورت زیر است:



گام ۷ همان‌طور که در بالا می‌بینید: $\bar{G}$ حداقل ۸ تا یال لازم دارد، پس حداکثر تعداد یال‌های G می‌شود:

$$q_{\max} = \frac{p(p-1)}{2} - 8 = \frac{9(9-1)}{2} - 8 = 36 - 8 = 28$$

متأسفانه سازمان سنجش به اشتباه ① را به عنوان جواب این سؤال در نظر گرفته.

$$\frac{k}{r^2} = 22 \times 10^8 \text{ N/C}^2 \rightarrow E = \frac{22 \times 10^8 \times 5 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-2}} = 4 \times 10^2 \text{ N/C}$$

۴۶ - گزینه ۲

درس نامه ۱ انرژی پتانسیل گرانشی: اگر جسمی با جرم m در ارتفاع h نسبت به سطح زمین قرار بگیرد، آن گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن از رابطه زیر به دست می آید (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کردیم).

$$U = mgh$$

ارتفاع (m) جرم (kg)
شتاب گرانش (m/s^2)

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

جرم (kg)

۲ انرژی جنبشی جسمی که با تندی v در حال حرکت است:

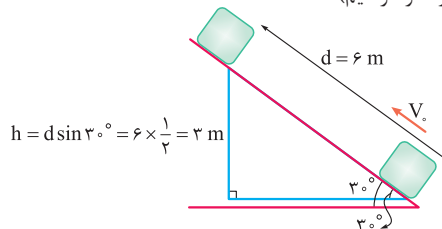
۳ انرژی مکانیکی: به مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی می گوئیم.

$$E = K + U$$

انرژی پتانسیل (J)
انرژی جنبشی (J)

۴ اگر در طول مسیر حرکت جسم، نیروهای اتلافی (مانند اصطکاک و مقاومت هوا) بر آن وارد شوند و بر روی جسم کار منفی انجام دهند، انرژی مکانیکی جسم کاهش می یابد. کار این نیروها (W_f) در یک مسیر معین، برابر با اختلاف انرژی مکانیکی جسم در ابتدا و پایان مسیر است.

گام ۱ کار نیروی اصطکاک برابر با اختلاف انرژی مکانیکی جسم در ابتدا و انتهای مسیر است. با توجه به شکل زیر، کار نیروی اصطکاک را به دست می آوریم (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را در محل اولیه جسم در نظر گرفتیم).



$$W_f = E_f - E_i = (K_f + U_f) - (K_i + U_i) = K_f - K_i + U_f - U_i$$

$$\frac{K_i = \frac{1}{2}mv_i^2, K_f = 0}{U_i = 0, U_f = mgh} \rightarrow W_f = -\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh$$

$$\frac{v_i = 1 \text{ m/s}, g = 10 \text{ m/s}^2}{h = 3 \text{ m}} \rightarrow W_f = -\frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 + 1 \times 10 \times 3 = -20 \text{ J}$$

گام ۲ همان طور که در گام اول دیدید، از انرژی جنبشی اولیه جسم ($K_i = 50 \text{ J}$) به اندازه 20 J توسط کار نیروی اصطکاک در این مسیر تلف شده است. سؤال از ما نسبت

را بر حسب درصد می خواهد؛ پس می توانیم بنویسیم:

$$\frac{|W_f|}{K_i} \times 100 = \frac{20}{50} \times 100 = 40\%$$

۴۷ - گزینه ۴

عبارت ها را بررسی می کنیم.

الف) اندازه گیری های دقیق نشان داده است که جرم هسته از مجموع جرم پروتون ها و نوترون های تشکیل دهنده اش اندکی کمتر است. این اختلاف جرم را، کاستی جرم هسته می گوئیم. ✗

گزینه درست معلوم شد ولی بریم سراغ بقیه عبارت ها:

ب) برای جدا کردن نوکلئون های یک هسته، انرژی لازم است. انرژی لازم برای این منظور را، انرژی بستگی هسته ای می گوئیم. ✓

۴۳ - گزینه ۴

درس نامه انرژی مکانیکی سامانه جرم - فنر:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

ثابت فنر (N/m)
دامنه نوسان (m)

ثابت فنر (k) تغییر نکرده و دامنه نوسان (A) ثابت است؛ پس طبق رابطه $E = \frac{1}{2}kA^2$ ، انرژی مکانیکی سامانه وزنه - فنر تغییر نمی کند.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}k_2A_2^2}{\frac{1}{2}k_1A_1^2} \xrightarrow{k_1=k_2, A_1=A_2} \frac{E_2}{E_1} = 1$$

مشاوره مشابه این سؤال در کنکور نوبت اول رشته ریاضی ۱۴۰۳ آمده است و با بررسی همان سؤال، می توانید به این سؤال پاسخ بدهید. حواستان باشد که اگر در این سؤال از روابط دیگر انرژی مکانیکی سامانه جرم - فنر (مثل $E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ و ...) استفاده کردید، باید تمام متغیرها را بررسی کنید.

۴۴ - گزینه ۳

هر یک از عبارت ها را بررسی می کنیم.

الف) همه اجسام جامد در هر دمایی که باشند، از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل می کنند که به آن، تابش گرمایی می گوئیم. ✓

ب) در دماهای معمولی، بیشتر تابش گسیل شده از سطح اجسام در ناحیه فروسرخ قرار دارد. ✗
پ) همان طور که در بررسی عبارت (الف) گفتیم، اجسام جامد در هر دمایی که باشند، تابش گرمایی رخ می دهد. ✗

ت) گازهای کم فشار و رقیق، طیفی گسسته را گسیل می کنند که شامل طول موج های معینی است. این طیف گسسته را معمولاً طیف گسیلی خطی یا به اختصار طیف خطی می گوئیم. ✓

مشاوره این سؤال هم از متن و زیرنویس کتاب درسی فیزیک دوازدهم طرح شده است. حدود ۳۰ درصد از سؤالات این آزمون، غیرمحاسباتی است. اگر می خواهید درصد بالایی در درس فیزیک کسب کنید، از مفاهیم این درس غافل نشوید.

۴۵ - گزینه ۱

درس نامه ۱ قانون کولن:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

بارهای الکتریکی (C) ثابت کولن ($\frac{N.m^2}{C^2}$)
نیروی الکتریکی (N)
فاصله (m)

۲ اندازه میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار q در فاصله r از آن:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \rightarrow (C) \leftarrow \text{بار الکتریکی}$$

فاصله (m) $\rightarrow (N/C)$
ثابت کولن ($\frac{N.m^2}{C^2}$)

گام ۱ مقادیر داده شده را در رابطه زیر جای گذاری می کنیم تا ببینیم بی می شه!

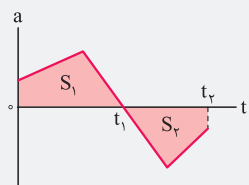
$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \rightarrow \frac{F = 6/4 \times 10^{-2} \text{ N}}{q_1 = 5 \times 10^{-6} \text{ C}, q_2 = 4 \times 10^{-6} \text{ C}} \rightarrow \frac{6/4 \times 10^{-2}}{r^2} = \frac{k \times 5 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{r^2} = 32 \times 10^8 \text{ N/C}^2$$

گام ۲ مقدار $\frac{k}{r^2}$ را در گام اول به دست آوردیم. سؤال از ما میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله $2r$ از آن را می خواهد؛ پس از رابطه زیر کمک می گیریم.

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \xrightarrow{r_2 = 2r} E = \frac{k|q|}{4r^2}$$

روش ابتدا درسنامه زیر را بخوانید:



درسنامه مساحت محصور بین نمودار شتاب-زمان و محور t بیانگر اندازه تغییرات سرعت است. در شکل مقابل، بخشی از نمودار $a-t$ ، بالای محور t و بخشی از آن زیر محور t است. در این صورت تغییرات سرعت در کل بازه زمانی t_1 تا t_2 به این صورت حساب می‌شود:

$$\Delta v = S_1 - S_2$$

حواستون باشه که باید مساحت بالای محور t رو منهای مساحت زیر محور t بکنیم.

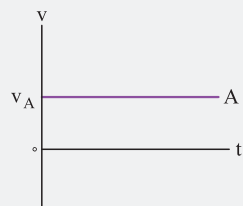
نمودار شتاب - زمان این حرکت به صورت شکل زیر است. با توجه به درسنامه بالا، شتاب متوسط متحرک در مدت زمان 20 s را می‌توانیم در یک گام پیدا کنیم.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v = S_1 - S_2} a_{av} = \frac{S_1 - S_2}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{(4 \times 15) - (5 \times 4)}{20} = 2 \text{ m/s}^2$$

۵۰- گزینه ۴

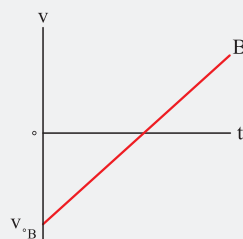
شفاف‌سازی اول این که در لحظه $t = 5\text{ s}$ که دو متحرک به هم می‌رسند، $x_A = x_B$ با هم برابر می‌شود (یعنی $x_A = x_B$). دوم این که با توجه به شکل داده شده، سرعت دو متحرک در لحظه $t = 15\text{ s}$ برابر می‌شود.

درسنامه ۱ متحرکی که نمودار سرعت-زمان آن به صورت شکل (الف) است، با سرعت ثابت حرکت می‌کند و معادله مکان - زمان آن را به صورت زیر می‌نویسیم:



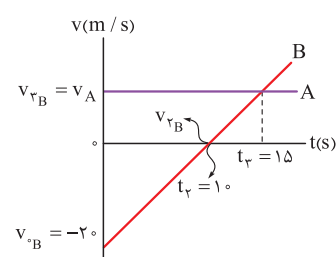
شکل (الف)

۲ شکل (ب)، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که با شتاب ثابت a بر روی خط راست حرکت می‌کند و شیب این نمودار بیانگر شتاب حرکت است.



شکل (ب)

معادله مکان - زمان این حرکت را به این صورت می‌نویسیم: $x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_{B0}t + x_{B0}$



روش گام با توجه به نمودار مقابل، برای آن که سرعت متحرک A را پیدا کنیم، کافی است با کمک شیب نمودار B، سرعت متحرک B را در لحظه $t_A = 10\text{ s}$ پیدا کنیم.

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{v_{rB} - v_{B0}}{t_A - 0} = \frac{v_A - v_{B0}}{t_A - t_B} \Rightarrow \frac{v_{rB} - (-20)}{10 - 0} = \frac{10 - (-20)}{10 - 0} \Rightarrow v_{rB} = 10 \text{ m/s}$$

با داشتن سرعت متحرک A، می‌توانیم معادله مکان - زمان آن را بنویسیم.

$$x_A = v_A t + x_{A0} \Rightarrow x_A = 10t + x_{A0}$$

پ وقتی تعداد پروتون‌های هسته افزایش می‌یابد، اگر هسته بخواهد پایدار بماند، باید تعداد نوترون‌های درون هسته نیز زیاد شود؛ بنابراین در هسته‌های پایدار، هر چه هسته سنگین‌تر می‌شود، نسبت تعداد نوترون به تعداد پروتون افزایش می‌یابد. ✓

مشاوره همان‌طور که دیدید، تنها با بررسی عبارت (الف) به گزینه درست می‌رسیم. در سؤالات به اصطلاح عبارتی (الف، ب و ...) معمولاً با حذف گزینه‌ها و بررسی عبارت‌های کمتر می‌توانید گزینه درست را پیدا کنید.

۴۸- گزینه ۱

شفاف‌سازی هیچ کدام از گزینه‌ها صفر نیست! پس این متحرک از مبدأ عبور نکرده و قبل از رسیدن به مبدأ تغییر جهت دارد.

درسنامه اگر معادله مکان - زمان متحرکی به صورت $x = At^2 + Bt + C$ باشد، متحرک:

(الف) در لحظه $t_0 = 0$ در مکان $x_0 = C$ قرار دارد.

(ب) در لحظه $t' = -\frac{B}{2A}$ تغییر جهت می‌دهد.

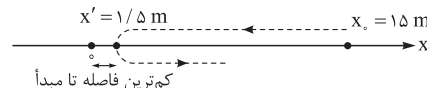
با توجه به معادله مکان - زمان متحرک $(x = \frac{2}{3}t^2 - 6t + 15)$ ، متحرک در لحظه $t_0 = 0$ در مکان $x_0 = 15\text{ m}$ بوده است و لحظه تغییر جهت آن برابر است با:

$$t' = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-6)}{2 \times \frac{2}{3}} = \frac{3 \times 6}{2 \times 2} = \frac{9}{2}\text{ s}$$

حالا می‌توانیم مکان تغییر جهت متحرک را حساب کنیم:

$$x' = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{9}{2}\right) + 15 = \frac{2 \times 81}{3 \times 2} - 27 + 15 = 15 - 27 + 15 = 3\text{ m}$$

پاسخ تست همین 3 m است. برای این که مطمئن شوید، مسیر حرکت متحرک را در شکل زیر نشان می‌دهیم. همین‌طور که در شکل می‌بینید، متحرک از مکان $x_0 = 15\text{ m}$ به سمت مبدأ حرکت کرده و در مکان $x' = 3\text{ m}$ تغییر جهت داده است؛ پس کمترین فاصله آن تا مبدأ 3 m است.



۴۹- گزینه ۳

درسنامه ۱ شتاب متوسط: $a_{av} = \frac{v_{\text{نهایی}} - v_{\text{اولیه}}}{\Delta t}$

۲ در حرکت با شتاب ثابت a بر روی خط راست، اگر سرعت در لحظه آغاز بازه زمانی Δt برابر v_1 باشد، سرعت در لحظه پایانی این بازه برابر می‌شود با:

$$v_2 = a\Delta t + v_1 \xrightarrow{a = 4 \text{ m/s}^2, \Delta t = 15 \text{ s}} v_2 = 4 \times 15 + v_1 = 60 + v_1$$

گام در ادامه، متحرک به مدت $\Delta t_2 = 5\text{ s}$ با شتاب $a_2 = -4\text{ m/s}^2$ حرکت می‌کند و سرعتش در لحظه پایانی این بازه به صورت زیر حساب می‌شود (دقت کنید که سرعت متحرک در ابتدای این بازه همان v_1 است که در گام اول حساب کردیم).

$$v_3 = a_2\Delta t_2 + v_1 \xrightarrow{a_2 = -4 \text{ m/s}^2, \Delta t_2 = 5 \text{ s}, v_1 = 60 + v_0} v_3 = -4 \times 5 + (60 + v_0) = 40 + v_0$$

گام حالا می‌توانیم شتاب متوسط در این حرکت 20 s تانیه‌ای را حساب کنیم.

$$a_{av} = \frac{v_3 - v_0}{\Delta t_{\text{کل}}} \xrightarrow{v_3 = 40 + v_0, \Delta t_{\text{کل}} = 20 \text{ s}} a_{av} = \frac{(40 + v_0) - v_0}{20} = 2 \text{ m/s}^2$$

گزینه ۳ - ۵۱

درس نامه معادله مکان - زمان گلوله‌ای که در شرایط خلأ از ارتفاع y_0 رها شده است:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

گام ۱ گلوله را از ارتفاع $y_0 = ۱۲۵$ m رها کرده‌ایم و پس از گذشت مدت زمان t به زمین ($y = 0$ m) رسیده است؛ پس می‌توانیم به کمک معادله مکان - زمان، زمان این سقوط را محاسبه کنیم.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \xrightarrow{y=0, y_0=125 \text{ m}, g=10 \text{ m/s}^2} 0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 125 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

گام ۲ برای محاسبه جابه‌جایی گلوله در ۲ ثانیه آخر، باید مکان گلوله در لحظه $t' = ۳$ s قبل از برخورد به زمین را حساب کنیم.

$$y' = -\frac{1}{2}gt'^2 + y_0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 3^2 + 125 = 80 \text{ m}$$

$$\Delta y = y - y' = 0 - 80 = -80 \text{ m} \quad (\text{جابه‌جایی گلوله در ۲ ثانیه آخر})$$

گام ۳ حالا می‌توانیم به کمک رابطه $v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ ، سرعت متوسط گلوله در ۲ ثانیه آخر حرکت را به دست بیاوریم.

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta y = -80 \text{ m}, \Delta t = 2 \text{ s}} v_{av} = \frac{-80}{2} = -40 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow |v_{av}| = 40 \text{ m/s}$$

دلیل این که سرعت متوسط منفی درآمده است، این است که ما مثل کتاب درسی جهت مثبت را رو به بالا فرض کرده‌ایم، اما در این تست هیچ کدام از گزینه‌ها منفی نیست؛ بنابراین ما قدرمطلق جواب نهایی را که اندازه سرعت متوسط است، در نظر می‌گیریم.

تیزبازی جابه‌جایی گلوله‌ای که از ارتفاع y_0 رها کرده‌ایم در بازه‌های ۱ ثانیه‌ای متوالی، از دنباله حسابی 5 m ، 15 m ، 25 m ، 35 m و 45 m ... تبعیت می‌کند. در این تست گلوله 125 m جابه‌جا شده است؛ پس مطابق شکل مقابل، در ۲ ثانیه آخر 80 m جابه‌جا شده است و اندازه سرعت متوسط آن در این ۲ s برابر می‌شود با:

$$v_{av} = \frac{80}{2} = 40 \text{ m/s}$$

گزینه ۲ - ۵۲

شفاف‌سازی «نیروی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند»، برآیند دو نیروی عمودی سطح و اصطکاک است و «نردبان در آستانه سُرخوردن»، هم‌چنان در حال تعادل است.

درس نامه ۱ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی:

ضرب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح

نیروی عمودی سطح $(N) \rightarrow f_{s, \max} = \mu_s F_N \leftarrow$ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی (N)

۲ اندازه نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برابر با برآیند دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

در رابطه بالا، f می‌تواند f_s یا f_k باشد.

گام ۱ ابتدا نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم، سپس با توجه به این که نردبان در حال تعادل است، برآیند نیروهای وارد بر آن در راستای y را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

گام ۱ برای نوشتن معادله مکان - زمان متحرک B، سرعت اولیه و شتاب حرکت آن را لازم داریم.

$$x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B} t + x_{0B}$$

$$a_B = \frac{0 - (-20)}{1 - 0} = 20 \text{ m/s}^2 \xrightarrow{v_{0B} = -20 \text{ m/s}} x_B = \frac{1}{2} \times 20 \times t^2 - 20t + x_{0B}$$

$$\Rightarrow x_B = t^2 - 20t + x_{0B}$$

گام ۲ دو متحرک در لحظه $t_1 = 5$ s به هم رسیده‌اند؛ پس داریم:

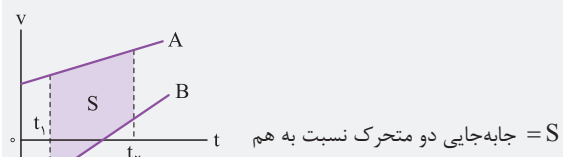
$$t_1 = 5 \text{ s} \text{ در لحظه } t_1: x_{1A} = x_{1B} \Rightarrow 10t_1 + x_{0A} = t_1^2 - 20t_1 + x_{0B}$$

$$\xrightarrow{t_1 = 5 \text{ s}} \underbrace{10 \times 5}_{50} + x_{0A} = \underbrace{5^2 - 20 \times 5}_{-75} + x_{0B} \Rightarrow x_{0B} - x_{0A} = 125 \text{ m}$$

$x_{0B} - x_{0A} = 125 \text{ m}$ یعنی دو متحرک در لحظه $t_0 = 0$ s در فاصله ۱۲۵ متری هم بوده‌اند.

روش اول نکته زیر را بخوانید.

نکته مساحت محصور بین نمودارهای سرعت - زمان دو متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 (مثلاً مساحت S در نمودار روبه‌رو) بیانگر جابه‌جایی دو متحرک نسبت به هم است.



گام ۱ می‌دانیم دو متحرک در لحظه $t_1 = 5$ s به هم رسیده‌اند؛ پس با توجه

به نکته بالا، فاصله دو متحرک در لحظه $t_0 = 0$ s معادل مساحت محصور بین دو نمودار در بازه زمانی $t_0 = 0$ s تا $t_1 = 5$ s است. برای محاسبه مساحت دوزنقه رنگی در نمودار مقابل، به مقدارهای v_{1B} و v_{2B} نیاز داریم که به راحتی با شیب نمودار B محاسبه می‌شود (البته با روش تشابه مثلث‌ها هم می‌توانید این سرعت‌ها را حساب کنید).

$$B \text{ نمودار } \Rightarrow \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}$$

$$10 \text{ s تا } 0 \text{ s} \text{ شیب در بازه } 5 \text{ s تا } 0 \text{ s} \Rightarrow \frac{0 - v_{0B}}{1 - 0} = \frac{v_{1B} - v_{0B}}{5 - 0} \Rightarrow \frac{0 - (-20)}{1} = \frac{v_{1B} - (-20)}{5} \Rightarrow v_{1B} = -10 \text{ m/s}$$

$$10 \text{ s تا } 0 \text{ s} \text{ شیب در بازه } 15 \text{ s تا } 10 \text{ s} \Rightarrow \frac{0 - v_{0B}}{10 - 0} = \frac{v_{2B} - v_{0B}}{15 - 10} \Rightarrow \frac{0 - (-20)}{10} = \frac{v_{2B} - 0}{15 - 10} \Rightarrow v_{2B} = 10 \text{ m/s}$$

تیزبازی در شکل بالا، مثلث‌های ۱ و ۲ برابرند؛ پس $v_{2B} = |v_{1B}|$ است. در واقع لازم نیست v_{1B} و v_{2B} را جداگانه حساب کنیم.

گام ۲ حالا می‌توانیم مساحت دوزنقه را حساب کنیم. ابعاد دوزنقه را با توجه به سرعت‌هایی که حساب کردیم، در شکل روبه‌رو آورده‌ایم.

$$S = \frac{20 + 30}{2} \times 5 = 125 \text{ m}$$

پس دو متحرک در بازه زمانی 0 s تا 5 s، 125 m نسبت به هم جابه‌جا شده‌اند تا به هم برسند. یعنی فاصله آن‌ها در لحظه $t_0 = 0$ s برابر 125 m بوده است.

گام ۱ سؤال از ما، نسبت $\frac{f_{s_2}}{R_2}$ و $\frac{R_2}{R_1}$ را می‌خواهد و ما هم این نسبت‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{f_{s_2}}{f_{s_1}} = \frac{40}{40} = 1, \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{40}}{\frac{40}{\sqrt{5}}} = \sqrt{2}$$

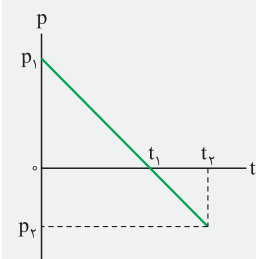
۵۴- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ نیروی خالص متوسط بر حسب تکانه:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = ma$$

(kg) جرم جسم (kg.m/s) تغییرات تکانه
(N) ← نیروی خالص متوسط (m/s²) شتاب (s) مدت زمان

۲ اگر متحرکی با شتاب ثابت بر روی مسیر مستقیم حرکت کند، نمودار تکانه - زمان آن به صورت یک خط راست (تابع درجه اول) است. مثل شکل مقابل:



نمودار تکانه - زمان متحرک به صورت یک خط راست (تابع درجه اول) است؛ پس متحرک با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند و در نتیجه، شتاب آن در هر لحظه برابر با شتاب متوسط آن در هر بازه زمانی است؛ پس برای این که شتاب متحرک در لحظه $t = 5s$ را به دست بیاوریم، کافی است شتاب متوسط آن در ۵ ثانیه اول را محاسبه کنیم.

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = ma$$

$$\frac{\Delta p = p_2 - p_1, p_1 = 18 \frac{kg \cdot m}{s}, p_2 = 0 \frac{kg \cdot m}{s}}{\Delta t = t_2 - t_1, t_1 = 0s, t_2 = 5s, m = 450g = 0.45kg} \rightarrow \frac{0 - 18}{5 - 0} = \frac{45}{100} a$$

$$\Rightarrow a = -4 m/s^2 \Rightarrow |a| = 4 m/s^2$$

۵۵- گزینه ۳

درس‌نامه در جدول زیر، دو کمیت مربوط به حرکت ماهواره به دور زمین بررسی شده است.

کمیت	رابطه	تناسب
تندی	$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$	$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$
دوره	$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}$	$T \propto \sqrt{r^3}$

در جدول بالا، G ثابت گرانش عمومی، M_e جرم زمین و r فاصله تا مرکز زمین است.

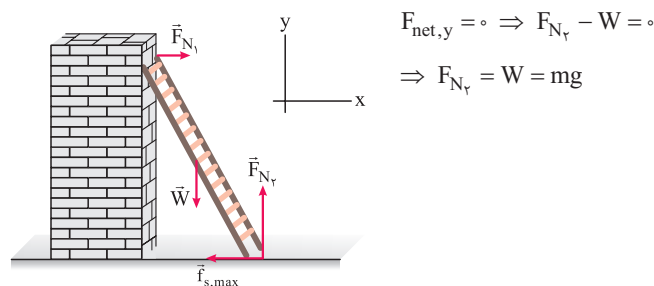
گام ۱ با توجه به این که تندی ماهواره A، دو برابر تندی ماهواره B است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{r_B}{r_A} \xrightarrow{v_A=2} \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{r_B}{r_A} = 4$$

گام ۲ حالا می‌توانیم خواسته سؤال، یعنی نسبت دوره ماهواره A به دوره ماهواره B را به دست بیاوریم:

$$\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2 = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^3 \xrightarrow{\frac{r_B}{r_A}=4} \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2 = 4^3 = 64 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \frac{T_B}{T_A} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{8}$$



$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_{N_y} - W = 0$$

$$\Rightarrow F_{N_y} = W = mg$$

گام ۲ نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، برابند دو نیروی $\vec{F}_{N_y}$ و $\vec{f}_{s,max}$ و برابر با $120\sqrt{17} N$ است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$R = \sqrt{F_{N_y}^2 + f_{s,max}^2} \xrightarrow{F_{N_y} = mg = 480N, f_{s,max} = 120\sqrt{17}N} R = \sqrt{480^2 + 120^2 \cdot 17} = 120\sqrt{17} N$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 120^2 \times 17 = 480^2 + f_{s,max}^2 \Rightarrow f_{s,max}^2 = 120^2 (17 - 16)$$

$$\Rightarrow f_{s,max} = 120 N$$

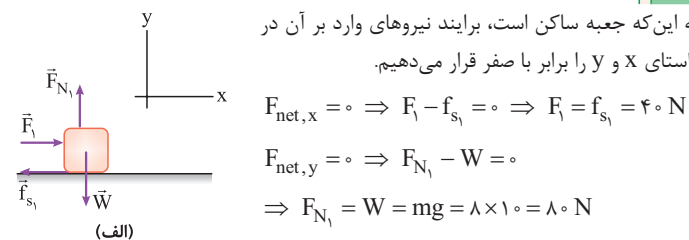
گام ۳ حالا می‌توانیم ضریب اصطکاک ایستایی بین نردبان و سطح افقی را به دست بیاوریم.

$$f_{s,max} = \mu_s F_{N_y} \xrightarrow{f_{s,max} = 120N, F_{N_y} = 480N} 120 = \mu_s \times 480 \Rightarrow \mu_s = \frac{1}{4} = 0.25$$

۵۳- گزینه ۲

شفاف‌سازی «جعبه ساکن می‌ماند» یعنی برابند نیروهای وارد بر آن در راستاهای افقی و قائم صفر است.

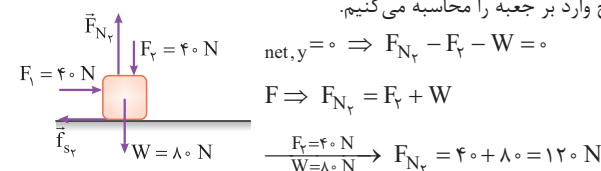
گام ۱ ابتدا نیروهای وارد بر جعبه در حالت اول را رسم می‌کنیم (شکل الف)، سپس با توجه به این که جعبه ساکن است، برابند نیروهای وارد بر آن در راستای X و Y را برابر با صفر قرار می‌دهیم.



در این حالت، نیرویی را که از طرف سطح افقی بر جسم وارد می‌شود، به دست می‌آوریم.

$$R_1 = \sqrt{F_{N_1}^2 + f_{s_1}^2} \xrightarrow{F_{N_1} = 80N, f_{s_1} = 40N} R_1 = \sqrt{80^2 + 40^2} = 40\sqrt{5} N$$

گام ۲ در حالت دوم، نیروی عمودی F_y نیز بر جعبه وارد می‌شود. در این حالت، نیروی عمودی سطح وارد بر جعبه را محاسبه می‌کنیم.



همان‌طور که می‌بینید، نیروی عمودی سطح وارد بر جعبه در این حالت (F_{N_2}) نسبت به حالت اول (F_{N_1}) زیاد شده است؛ پس طبق رابطه $f_{s,max} = \mu_s F_{N_2}$ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جعبه نیز افزایش می‌یابد و در حالت دوم هم جعبه ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر آن از نوع ایستایی است. پس برابند نیروهای وارد بر جعبه در راستای X را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F - f_{s_2} = 0 \Rightarrow F = f_{s_2} = 40 N$$

در این حالت هم، نیرویی را که از طرف سطح افقی بر جسم وارد می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$R_2 = \sqrt{F_{N_2}^2 + f_{s_2}^2} \xrightarrow{F_{N_2} = 120N, f_{s_2} = 40N} R_2 = \sqrt{120^2 + 40^2} = 40\sqrt{10} N$$

۵۷- گزینه ۳

۱ درس نامه ۱ تندی انتشار موج عرضی در فتر یا تار کشیده شده:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \rightarrow \text{طول فتر یا تار (m)} \\ \text{جرم فتر یا تار (kg)} \rightarrow m$$

۲ رابطه بین تندی انتشار موج، بسامد موج و طول موج:

$$v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \text{تندی انتشار موج (m/s)} \\ f = \frac{1}{T} \rightarrow \text{بسامد (Hz)} \rightarrow \lambda \leftarrow \text{طول موج (m)}$$

گام ۱ با سؤالی مواجهیم که فقط باید داده‌ها را در رابطه مورد نظر جای گذاری کنیم. ابتدا تندی انتشار موج را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \xrightarrow{\substack{F=1 \cdot N, L=5 \cdot \text{cm} = 0.05 \text{ m} \\ m=2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} v = \sqrt{\frac{1 \cdot 0.05}{2 \cdot 10^{-3}}} = 5 \text{ m/s}$$

گام ۲ حالا طول موج ایجاد شده در فتر را به دست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{\substack{v=5 \text{ m/s} \\ f=20 \text{ Hz}}} \lambda = \frac{5}{20} = 0.25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

۵۸- گزینه ۲

۱ درس نامه ۱ بسامد تشدیدي هماهنگ nام در تار مرتعش دو انتها بسته:

تندی انتشار موج عرضی در تار (m/s) شماره هماهنگ

$$f_n = \frac{n v}{2L} \\ \text{طول تار (m)} \rightarrow L$$

گام ۱ کافی است داده‌ها را در رابطه‌های مورد نظر جای گذاری کنیم. ابتدا شماره هماهنگ تار را محاسبه می‌کنیم:

$$f_n = \frac{n v}{2L} \xrightarrow{\substack{f_n=600 \text{ Hz}, v=180 \text{ m/s} \\ L=60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}}} 600 = \frac{n \times 180}{2 \times 0.6} \Rightarrow n = 4$$

۳ و ۴ پُر!

گام ۲ سؤال از ما، طول امواج صوتی گسیل شده توسط تار را نیز می‌خواهد که با جای گذاری ساده در رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{\substack{v=336 \text{ m/s} \\ f=600 \text{ Hz}}} \lambda = \frac{336}{600} = 0.56 \text{ m} = 56 \text{ cm}$$

۱ پُر پُر!

۵۹- گزینه ۴

۱ درس نامه ۱ تابع کار فلز: کم‌ترین کار لازم برای خارج کردن الکترون از یک فلز خاص.

$$\text{تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلأ (m/s)} \\ \text{ثابت پلانک (J.s یا eV.s)} \rightarrow h \\ W_0 = h f_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \leftarrow \text{تابع کار فلز (eV یا J)} \\ \text{بسامد آستانه فوتوالکترون‌ها (1/s)} \rightarrow f_0 \\ \text{طول موج آستانه فوتوالکترون‌ها (m)} \rightarrow \lambda_0$$

۲ معادله ریدبرگ: طول موج خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > n') \quad (R \approx 1.097 \times 10^7 \text{ nm}^{-1})$$

شماره رشته

در این رابطه، طول موج (λ) برحسب نانومتر است.

شماره و نام رشته‌ها به صورت جدول زیر است:

شماره رشته (n')	۵	۴	۳	۲	۱
نام رشته	پفوند	براکت	پاشن	بالمر	لیمان

بلندترین طول موج خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته مربوط به $n = n' + 1$ است.

۵۶- گزینه ۴

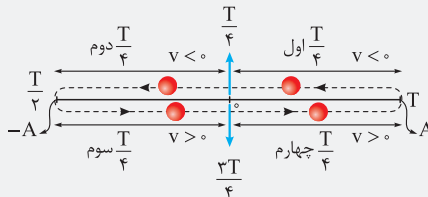
۱ شفاف سازی با توجه به معادله حرکت هماهنگ ساده نوسانگر:

$$A = 0.04 \text{ m}, \quad \omega = 50 \text{ rad/s}$$

۱ درس نامه ۱ معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده:

$$x = A \cos \omega t \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \text{زمان (s)} \rightarrow t, \quad \text{دامنه (m)} \rightarrow A \\ \text{دوره تناوب (s)} \rightarrow T, \quad \text{بسامد زاویه‌ای (rad/s)} \rightarrow \omega \\ \text{مکان نوسانگر (m)} \rightarrow x$$

۲ با توجه به شکل زیر، در $\frac{T}{4}$ های اول و دوم سرعت نوسانگر منفی و در $\frac{T}{4}$ های سوم و چهارم، سرعت نوسانگر مثبت است.



۳ تندی نوسانگر هماهنگ ساده در مرکز نوسان ($x = 0 \text{ m}$) بیشینه است و اندازه آن از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$v = A\omega$$

گام ۱ ابتدا با توجه به معادله حرکت هماهنگ ساده نوسانگر، دوره تناوب آن را به دست می‌آوریم تا بتوانیم در گام بعدی بفهمیم که نوسانگر در لحظه $t = 0.07\pi \text{ s}$ کجاست!

$$\omega = 50 \text{ rad/s} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \frac{2\pi}{T} = 50 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{50} \text{ s}$$

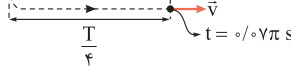
گام ۲ حالا لحظه $t = 0.07\pi \text{ s}$ را برحسب دوره می‌نویسیم.

$$\frac{t}{T} = \frac{0.07\pi}{\frac{2\pi}{50}} = \frac{0.07 \times 50}{2} = 1.75 \Rightarrow t = 1.75 T = T + \frac{3}{4} T$$

گام ۳ فب ... فهمیدیم نوسانگر در لحظه $t = 0.07\pi \text{ s}$ کجاست! لحظه $t = 0.07\pi \text{ s}$

را برحسب دوره ($t = T + \frac{3}{4} T$) به دست آوردیم. این یعنی، نوسانگر از لحظه $t_1 = 0.07\pi \text{ s}$ تا $t_2 = 0.07\pi \text{ s}$ ، یک دور کامل می‌زند و $\frac{3}{4}$ دوره نیز طی می‌کند؛ پس نوسانگر در این لحظه،

در مکان $x = 0 \text{ m}$ قرار دارد و در جهت محور X حرکت می‌کند ($v > 0$) و تندی آن (۲ پُر!) و تندی آن (۱ پُر پُر!).



(در حقیقت، نوسانگر هماهنگ ساده، بر روی یک خط راست نوسان می‌کند، اما برای این‌که مسیر حرکت را بهتر متوجه شوید، این‌گونه (خط‌چین) رسم کردیم.) حالا که فهمیدیم تندی نوسانگر در لحظه $t = 0.07\pi \text{ s}$ بیشینه است و در جهت محور X حرکت می‌کند، مقدار آن را نیز به دست می‌آوریم.

$$v = A\omega \xrightarrow{\substack{A=0.04 \text{ m}, \omega=50 \text{ rad/s}}} v = \frac{4}{100} \times 50 = 2 \text{ m/s}$$

تیزبازی می‌توانستیم لحظه $t = 0.07\pi \text{ s}$ را در معادله حرکت هماهنگ ساده نوسانگر جای‌گذاری کنیم تا ببینیم نوسانگر کجاست و اگر نیاز بود، جهت آن را بررسی کنیم.

$$x = 0.04 \cos 50t \xrightarrow{t=0.07\pi \text{ s}} x = 0.04 \cos 50 \times \frac{2\pi}{50} \times 1.75 = 0 \text{ m}$$

پس نوسانگر در این لحظه در مرکز نوسان و تندی آن بیشینه است.

$$v = A\omega \xrightarrow{\substack{A=0.04 \text{ m}, \omega=50 \text{ rad/s}}} v = \frac{4}{100} \times 50 = 2 \text{ m/s}$$

چون در گزینه‌ها، مقدار ۲- نداریم، پس نیازی نیست جهت حرکت نوسانگر در این لحظه را پیدا کنیم. تمام!

گزینه ۱ - ۶۱

گام ۱ در حالت اول داریم: $(F_1 = F_2 = F)$

در حالت دوم، نصف بار q_2 از کره (۲) منتقل شده است. بار هر یک از کره‌ها را پس از این انتقال به دست می‌آوریم.

$q'_1 = q_1 + \frac{q_2}{2} = q_1 - \frac{q_2}{2} = q_1 - \frac{q_1}{2} = \frac{q_1}{2}$

$q'_2 = q_2 - \frac{q_2}{2} = \frac{q_2}{2} = \frac{q_1}{2}$

در حالت دوم، بارهای q'_1 و q'_2 هم علامت می‌شوند؛ پس نیروی الکتریکی‌ای که به هم وارد می‌کنند (F')، از نوع نیروی دافعه است (۲) و (۴) پُر! حالا نسبت $\frac{F'}{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{F'}{F} = \frac{k \frac{|q'_1| |q'_2|}{r^2}}{k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}} = \frac{|q'_1| |q'_2|}{|q_1| |q_2|} = \frac{\frac{q_1}{2} \times \frac{q_1}{2}}{q_1 \times q_1} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{1}{4}$$

مشاوره فکر نکنید همه سؤالاتی که از الکتریسیته ساکن در کنکور مطرح می‌شوند، دشوار یا دارای محاسبات طولانی هستند. همان‌طور که می‌بینید، این سؤال را می‌توانیم در کمتر از زمان استاندارد پاسخ بدهیم.

گزینه ۳ - ۶۲

درس‌نامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت موازی:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

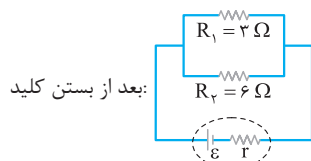
۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است.

$$V_{باتری} = V_{R_{eq}} = \frac{\varepsilon R_{eq}}{R_{eq} + r}$$

گام ۱ قبل از بستن کلید، مقاومت $R_2 = 6 \Omega$ در مدار قرار ندارد و بعد از بستن کلید، R_1 و R_2 موازی می‌شوند. مقاومت معادل مدار را قبل از بستن کلید (R_{eq}) و بعد از بستن کلید (R'_{eq}) به دست می‌آوریم.



$$R_{eq} = R_1 = 2 \Omega$$



$$R'_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \times 6}{2 + 6} = \frac{12}{8} = 1.5 \Omega$$

گام ۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\varepsilon R'_{eq}}{\varepsilon R_{eq} + r} = \frac{V' = V - \frac{\varepsilon r}{R_{eq} + r}}{V} = \frac{(R_{eq} + r) R'_{eq}}{(R'_{eq} + r) R_{eq}}$$

$$\frac{R_{eq} + r}{R'_{eq} + r} = \frac{(R_{eq} + r) \times 2}{(2 + r) \times 1.5} \Rightarrow 6 + 2r = 4 + 1.5r \Rightarrow r = 2 \Omega$$

ابتدا بلندترین طول موج فوتونی را که می‌تواند الکترونی را از طلا جدا کند (طول موج آستانه)، به دست می‌آوریم.

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{W_0 = 5.1 \text{ eV}, c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{h = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV.s}} \Rightarrow \lambda_0 = 240 \text{ nm}$$

پس بلندترین طول موج فوتونی که می‌تواند الکترونی را از طلا جدا کند (طول موج آستانه) برابر با $\lambda_0 = 240 \text{ nm}$ است و فوتون‌هایی با طول موج کمتر از این مقدار، توانایی جدا کردن الکترون از طلا را دارند. اما نکته حل سؤال این است که این مقدار، از طول موج‌های خط طیف گسیلی اتم هیدروژن نیست! حدود گستره طول موج خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در رشته لیمن، از 100 nm تا 400 nm است ($100 \text{ nm} \leq \lambda \leq 400 \text{ nm}$)؛ بنابراین از تابش‌های اتم هیدروژن، طول موج گسیلی که بتواند الکترونی را از طلا جدا کند، در رشته لیمن است (چون گستره طول موج خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در رشته لیمن، کمتر از 240 nm است). پس با استفاده از معادله ریدبرگ، بلندترین طول موج خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در رشته لیمن را به دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \xrightarrow{R=1.1 \times 10^7 \text{ (nm)}^{-1}} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{400} \Rightarrow \lambda = 133.3 \text{ nm}$$

تله اگر در حل سؤال عجله کنید و به خواسته آن توجه نکنید، ممکن است ۱ یعنی طول موج آستانه را انتخاب کنید.

گزینه ۲ - ۶۰

استراتژی با توجه به صفر بودن میدان الکتریکی در نقطه M، جهت میدان‌های الکتریکی و علامت بارهای q_1 و q_2 را تعیین کنید، سپس نسبت اندازه میدان‌های الکتریکی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ را بنویسید و از آن‌جا اندازه بار q_2 را به دست بیاورید.

درس‌نامه ۱ جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.

۲ شرط آن که میدان الکتریکی خالص در یک نقطه صفر باشد، آن است که میدان الکتریکی خالص در راستای افقی و در راستای قائم در آن نقطه صفر باشد.

$$\vec{E}_{net, y} = 0, \vec{E}_{net, x} = 0$$

۱ $q_1 > 0$ است؛ پس میدان الکتریکی حاصل از آن در نقطه M در جهت محور y است. برای آن که میدان الکتریکی در نقطه M صفر باشد، باید $\vec{E}_2$ به طرف بار q_2 باشد تا مؤلفه $\vec{E}_{2y}$ بتواند $\vec{E}_1$ را خنثی کند؛ بنابراین $q_2 < 0$ است. همچنین $\vec{E}_2$ باید به طرف راست باشد تا مؤلفه $\vec{E}_{2x}$ را خنثی کند؛ پس باید $q_2 > 0$ باشد (۳) و (۴) پُر!

۲ میدان الکتریکی خالص در نقطه M هم در راستای افقی و هم در راستای قائم صفر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$E_2 = E_{2x} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \tan \alpha \xrightarrow{\tan \alpha = \frac{r_2}{r_1} = \frac{4}{2} = 2} \frac{E_2}{E_1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{k \frac{|q_2|}{r_2^2}}{k \frac{|q_1|}{r_1^2}} = 2 \xrightarrow{r_2 = 4 \text{ cm}, r_1 = 2 \text{ cm}} \frac{|q_2|}{16} = 2 \Rightarrow \frac{|q_2| \times 400}{1600 \times 5} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{|q_2|}{2} = 2 \Rightarrow |q_2| = 4 \mu\text{C} \xrightarrow{q_2 > 0} q_2 = 4 \mu\text{C}$$

۶۴- گزینه ۴

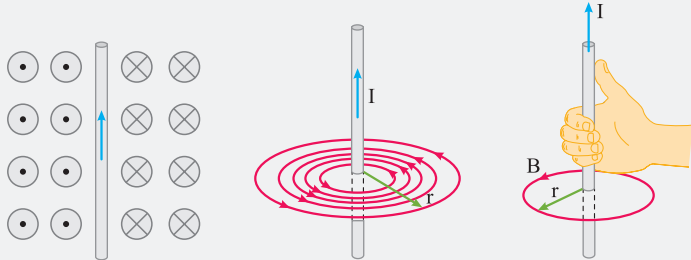
دماسنج‌های معیار عبارت‌اند از: ۱) دماسنج گازی ۲) دماسنج مقاومت پلاتینی ۳) تفسنج (پیرومتر) (درستی ۱)

اساس کار دماسنج‌های مقاومت پلاتینی، مبتنی بر تغییر مقاومت الکتریکی با دما است (درستی ۲). در این دماسنج‌ها از پلاتین استفاده می‌کنند که تقریباً دچار خوردگی نمی‌شود (درستی ۳) و نقطه ذوب بالایی دارد (نادرستی ۴).

۶۵- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان:

وقتی که از یک سیم، جریان الکتریکی عبور می‌کند، در اطراف آن میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. طبق قاعده دست راست، اگر سیم را طوری در دست راست بگیریم که انگشت شست دست راست در جهت جریان باشد، جهت خم شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی در اطراف آن را نشان می‌دهد.



هر چه از سیم حامل جریان دورتر شویم، میدان مغناطیسی حاصل از آن ضعیف‌تر می‌شود و برعکس. همچنین، هر چه جریان الکتریکی عبوری از سیم بیشتر شود، میدان مغناطیسی حاصل از آن در فاصله معین از آن نیز بیشتر می‌شود.

جریان الکتریکی عبوری از سیم $B \propto \frac{I}{r}$
فاصله r → میدان مغناطیسی حاصل از سیم حامل جریان

با استفاده از قاعده دست راست می‌فهمیم که میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۱) در نقطه A درون سو (⊗) و در بقیه نقاط برون سو (⊙) و همچنین، میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۲) در نقطه C برون سو (⊙) و در بقیه نقاط درون سو (⊗) است. از طرفی، جریان الکتریکی عبوری از سیم‌ها یکسان و نقطه B دورتر از سیم (۲) است؛ پس میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۲) در نقطه B (درون سو) ضعیف‌تر است. در نتیجه، میدان مغناطیسی خالص در نقاط A، B و C به ترتیب درون سو (⊗)، برون سو (⊙) و برون سو (⊙) است.

عبوری از سیم‌ها یکسان و نقطه B دورتر از سیم (۲) است؛ پس میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۲) در نقطه B (درون سو) ضعیف‌تر است. در نتیجه، میدان مغناطیسی خالص در نقاط A، B و C به ترتیب درون سو (⊗)، برون سو (⊙) و برون سو (⊙) است.

۶۶- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ نیروی مرکزگرا: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیروی خالصی در راستای شعاع دایره و به سمت مرکز آن وارد می‌شود. به این نیروی خالص که منجر به حرکت دایره‌ای می‌شود، نیروی مرکزگرا می‌گوییم. نیروی مرکزگرا نیروی جدیدی نیست، نیروهای گرانشی، الکتریکی و ... می‌توانند نیروی مرکزگرا را تأمین کنند. قانون دوم نیوتون در حرکت دایره‌ای یکنواخت به صورت مقابل است:

$$F_{\text{net}} = \frac{m v^2}{r}$$

جرم (kg) تند (m/s) شعاع (m)

۲ اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک:

$$F_B = |q| v B \sin \theta$$

زاویه بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$ تند (m/s) اندازه میدان مغناطیسی (T) اندازه بار الکتریکی (C)

۶۳- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت متوالی R_1 و R_2 :



$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$$

۲ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن.

$$R = \frac{V}{I} \rightarrow (V) \text{ اختلاف پتانسیل الکتریکی} \rightarrow (A) \text{ جریان الکتریکی}$$

۳ جریان الکتریکی خروجی از باتری:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{eq}} + r}$$

نیروی محرکه مولد (V) مقاومت درونی مولد (Ω) مقاومت معادل مدار (Ω) جریان الکتریکی (A)

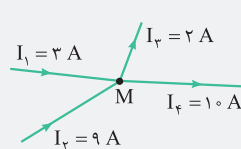
۴ در مقاومت‌های موازی، نسبت جریان عبوری از دو مقاومت برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

۵ توان مصرفی مقاومت:

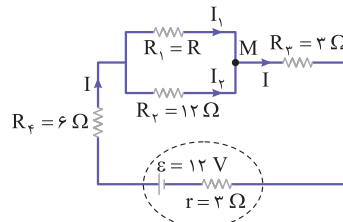
$$P = R I^2$$

مقاومت الکتریکی (Ω) توان مصرفی (W) جریان الکتریکی (A)



۶ قاعده انشعاب: مجموع جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می‌شوند، برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب (گره) خارج می‌شوند، مثلاً در شکل مقابل، جریان $I_1 + I_2 = 12 \text{ A}$ به گره M وارد شده و جریان $I_3 + I_4 = 12 \text{ A}$ از آن خارج شده است.

۷ توان مصرفی دو مقاومت R_1 و R_2 را برابر هم قرار می‌دهیم و از آن‌جا، رابطه‌ای بین I و I_1 به دست می‌آوریم.



$$P_1 = P_2 \Rightarrow R_1 I_1^2 = R_2 I_2^2$$

$$= R_2 I_2^2 \xrightarrow{\frac{R_2 = 12 \Omega}{R_1 = 6 \Omega}} 12 I_2^2 = 3 I_1^2$$

$$\Rightarrow 4 I_2^2 = I_1^2 \Rightarrow I = 2 I_1$$

۸ قاعده انشعاب را در گره M می‌نویسیم.

$$I_1 + I_2 = I \xrightarrow{I = 2 I_1} I_1 + I_2 = 2 I_2 \Rightarrow I_1 = I_2$$

مقاومت‌های R_1 و R_2 با هم موازی‌اند؛ بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها یکسان است و می‌توانیم بنویسیم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \xrightarrow{\frac{I_1 = I_2}{R_2 = 12 \Omega}} R_1 = 12 \Omega$$

۹ حالا می‌توانیم مقاومت معادل مدار را حساب کنیم.

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 \times 12}{12 + 12} = 6 \Omega$$

R_1 و R_2 موازی‌اند:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_{1,2} + R_3 = 6 + 6 + 3 = 15 \Omega$$

R_1 ، R_2 و R_3 متوالی‌اند:

۱۰ جریان الکتریکی گذرنده از مولد را به دست می‌آوریم و از آن‌جا، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری که همان اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است، محاسبه می‌کنیم.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{eq}} + r} \xrightarrow{\mathcal{E} = 12 \text{ V}, R_{\text{eq}} = 15 \Omega, r = 3 \Omega} I = \frac{12}{15 + 3} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

$$V = R_{\text{eq}} \times I \xrightarrow{\frac{R_{\text{eq}} = 15 \Omega}{I = \frac{2}{3} \text{ A}}} V = 15 \times \frac{2}{3} = 10 \text{ V}$$

گزینه ۲ - ۶۹

درس نامه چگالی: نسبت جرم به حجم ماده همگن.

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \text{چگالی (kg/m}^3\text{)} \leftarrow \text{چگالی (m}^3\text{)} \rightarrow \text{جرم (kg)}$$

گام ۱ دوتا کره داریم که جرم و شعاع آن‌ها را نسبت به هم داریم. کافی است نسبت $\frac{\rho_A}{\rho_B}$ را به دست بیاوریم ولی قبلش نکته زیر را بخوانید.

نکته حجم کره از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} \xrightarrow{V = \frac{4}{3} \pi r^3} \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^3$$

$$\frac{m_A}{r_A} = \frac{1}{10} \times \frac{m_B}{r_B} \rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{1}{10} \times \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^3 = \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{10} \right)^3 = \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \rho_A = \frac{1}{1000} \rho_B$$

گام ۲ برای این که ببینیم چگالی کره A تقریباً چند درصد بیشتر از چگالی کره B است، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{\rho_A - \rho_B}{\rho_B} \times 100 = \frac{\frac{1}{1000} \rho_B - \rho_B}{\rho_B} \times 100 = \frac{-999}{1000} \times 100 = -99.9\%$$

گزینه ۳ - ۷۰

درس نامه ۱ فشار کل در عمق h از سطح آزاد مایع:

$$P = \rho g h + P_0 \rightarrow \text{فشار جو (Pa)}$$

عمق (m) چگالی مایع (kg/m³) شتاب گرانش (m/s²)

۲ فشار پیمانه‌ای (P_g): اختلاف فشار مطلق و فشار جو.

$$P_g = P - P_0$$

فشار مطلق فشار پیمانه‌ای فشار جو

گام ۱ در سطح آزاد مایع (h = 0 m)، فشار برابر با P₀ = ۱۰^۵ Pa (این فشار جو است) و فشار در عمق ۱۶۰ cm مایع برابر با P_g = ۱/۲ × ۱۰^۵ Pa است. با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، چگالی مایع را به دست می‌آوریم.

$$P = \rho g h + P_0$$

$$\frac{P = 1/2 \times 10^5 \text{ Pa}, h = 160 \text{ cm} = 1/6 \text{ m}}{P_0 = 10^5 \text{ Pa}, g = 10 \text{ m/s}^2} \rightarrow 1/2 \times 10^5 = \rho \times 10 \times 1/6 + 10^5$$

$$\Rightarrow 16\rho = 2 \times 10^4 \Rightarrow \rho = 1250 \text{ kg/m}^3 = 1/25 \text{ g/cm}^3$$

۴ و ۵ در تبدیل یکای kg/m³ به g/cm³ از نکته زیر استفاده کردیم:

نکته یکی از یکاهای متداول چگالی، یکای g/cm³ است. برای تبدیل یکای kg/m³ به g/cm³ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \xrightarrow{\frac{\div 1000}{\times 1000}} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

گام ۲ در قسمت دوم سؤال، فشار پیمانه‌ای در عمق یک‌متری مایع را می‌خواهیم که با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر به سادگی محاسبه می‌کنیم.

$$P = \rho g h + P_0 \xrightarrow{P_g = P - P_0} P_g = \rho g h$$

$$\frac{\rho = 1250 \text{ kg/m}^3}{g = 10 \text{ m/s}^2, h = 1 \text{ m}} \rightarrow P_g = 1250 \times 10 \times 1 = 12500 \text{ Pa}$$

برای تعیین جهت این نیرو، از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت حرکت بار مثبت ($\vec{v}$) قرار بدهیم، به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم در جهت $\vec{B}$ قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت $\vec{F}$ را نشان می‌دهد. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.

نوع بار الکتریکی هر سه ذره را با استفاده از قاعده دست راست مشخص می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت حرکت ذره قرار بدهیم، به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم، در جهت میدان مغناطیسی قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره را نشان می‌دهد. اگر این سه جهت با دست راست جور در بیاید، بار الکتریکی ذره مثبت و اگر با دست چپ جور در بیاید، بار الکتریکی ذره منفی است. در شکل داده‌شده، سه ذره در میدان مغناطیسی یکنواخت بر روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کنند؛ پس نیروی مغناطیسی، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند و انگشت شستمان در قاعده دست راست باید به سمت مرکز دایره باشد.

همان‌طور که در شکل می‌بینید، قاعده دست راست برای ذره (۱) با دست راست و برای ذره‌های (۲) و (۳) با دست چپ جور درمی‌آید. پس بار الکتریکی ذره (۱) مثبت و بار الکتریکی ذره‌های (۲) و (۳) منفی است (نادرستی عبارتهای (الف) و (ب) و درستی عبارت (ت)).

گزینه درست معلوم شد و نیازی به بررسی عبارت (ب) نیست! ولی ما برایتان بررسی می‌کنیم.

همان‌طور که گفتیم، نیروی مغناطیسی نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad \frac{F = |q|vB \sin \theta}{\theta = 90^\circ, \sin 90^\circ = 1} \rightarrow |q|vB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}$$

چون v ، B و $|q|$ هر سه ذره یکسان و شعاع حرکت ذره (۲) از بقیه بیشتر است، پس جرم ذره (۲) نیز از بقیه بیشتر است.

مشاوره در سؤالات به اصطلاح چندموردی (الف، ب و ...)، گزینه‌های نادرست را با توجه به عبارتهای حذف کنید تا زودتر به پاسخ برسید. مثلاً در این سؤال تنها با بررسی عبارت (الف) به پاسخ درست می‌رسیم و نیازی به بررسی سایر عبارتهای نیست.

گزینه ۴ - ۶۷

در بعضی از مدارها که چندین القاگر دارند، تغییرات جریان در یک القاگر می‌تواند نیروی محرکه ناخواسته‌ای را در القاگرهای مجاور القا کند. برای کم‌ترکردن این اثر ناخواسته، باید سطح حلقه‌های القاگرهای مجاور را عمود بر هم قرار داد. در این صورت، اثر القای متقابل تا حد امکان کوچک می‌شود.

مشاوره این سؤال از متن و شکل کتاب درسی و زیرنویس آن طراحی شده است. کتاب درسی را بخوانید تا حسرت این جور تست‌ها را نخورید.

گزینه ۳ - ۶۸

درس نامه نیروی محرکه القایی متوسط برای پیچه یا سیم‌لوله‌ای که از N دور مشابه تشکیل شده است:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \rightarrow \varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta B A \cos \theta}{\Delta t}$$

مساحت حلقه (m²) تغییر میدان مغناطیسی (T) زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه (θ) مدت زمان (s) تعداد دور

آهنگ تغییرات میدان مغناطیسی ($\frac{\Delta B}{\Delta t}$): ($\frac{T}{s}$)

یک جای‌گذاری ساده در رابطه زیر ما را به جواب می‌رساند:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta B A \cos \theta}{\Delta t}$$

$$\frac{\varepsilon_{av} = 1/2 \text{ V}, N = 500}{\frac{\Delta B}{\Delta t} = -1/6 \frac{T}{s}, \theta = 0^\circ, \cos 0^\circ = 1} \rightarrow 1/2 = -500 \times (-1/6) \times A \times 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{500} \text{ m}^2 = 40 \text{ cm}^2$$

۷۳ - گزینه ۱



درس نامه ۱ انبساط حجمی یک جسم جامد:

تغییر دما بر حسب درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) ضریب انبساط حجمی ($\frac{1}{K}$) تغییر دما بر حسب کلوین (K) تغییر دما بر حسب درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$)

$$\Delta T = \Delta \theta$$

$$\Delta V = V_1 \times \beta \Delta T$$

تغییر دما بر حسب کلوین (K) تغییر دما بر حسب درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) تغییر دما بر حسب درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$)

رابطه بین دما بر حسب درجه سلسیوس و کلوین:

$$T = \theta + 273$$

دما بر حسب درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) دما بر حسب کلوین (K)

رابطه بین دما بر حسب درجه سلسیوس و درجه فارنهایت:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32$$

دما بر حسب درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) دما بر حسب درجه فارنهایت ($^{\circ}\text{F}$)

طبق صورت سؤال، ارتفاع مخزن استوانه‌ای، Δh (یا 500 cm) و فاصله بین سطح بنزین تا بالای ظرف 25 cm است؛ پس ارتفاع اولیه بنزین در مخزن، 475 cm ($500 - 25$) است.

از انبساط ظرف صرف نظر شده است؛ پس اگر ارتفاع بنزین درون ظرف پس از انبساط به اندازه 25 cm بالاتر بیاید، بنزین از ظرف سرریز می‌شود؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta V_{\text{بنزین}} = \beta_{\text{بنزین}} V_{\text{بنزین}} \Delta T$$

$$\frac{\Delta V_{\text{بنزین}}}{V_{\text{بنزین}}} = \beta_{\text{بنزین}} \Delta T, \Delta T = \Delta \theta \rightarrow \Delta h_{\text{بنزین}} = \beta_{\text{بنزین}} h_{\text{بنزین}} \Delta \theta$$

$$\frac{\Delta h_{\text{بنزین}}}{h_{\text{بنزین}}} = \beta_{\text{بنزین}} \Delta \theta \rightarrow \frac{25}{475} = 10^{-3} \times \frac{1}{K} \Delta \theta$$

$$\frac{\Delta \theta = \theta_f - \theta_i}{\theta_i = 263 - 273 = -10^{\circ}\text{C}} \rightarrow \theta_f - (-10) = \frac{1000}{19} \Rightarrow \theta_f = \frac{110}{19}^{\circ}\text{C}$$

حالا θ_f را بر حسب درجه فارنهایت به دست می‌آوریم.

$$F_f = \frac{9}{5}\theta_f + 32$$

$$\theta_f = \frac{110}{19}^{\circ}\text{C} \rightarrow F_f = \frac{9}{5} \times \frac{110}{19} + 32 = 76 / 19 + 32 = 108 / 19^{\circ}\text{F}$$

همان‌طور که می‌بینید، پاسخ داخل گزینه‌ها نیست! شاید منظور طراح از ارتفاع Δh (یا 500 cm)، ارتفاع اولیه بنزین در مخزن است. اگر منظور این است، بهتر بود که سؤال به نحو دیگری مطرح می‌شد تا ابهامی پیش نیاید؛ مثلاً: «مقداری بنزین تا ارتفاع Δh در مخزنی استوانه‌ای ریخته شده است...». حالا با این دیدگاه، سؤال را حل می‌کنیم. در این حالت، چون فاصله بین سطح بنزین تا بالای ظرف 25 cm است، پس ارتفاع ظرف 525 cm ($500 + 25$) است و می‌نویسیم:

$$\Delta V_{\text{بنزین}} = \beta_{\text{بنزین}} V_{\text{بنزین}} \Delta T$$

$$\frac{\Delta V_{\text{بنزین}}}{V_{\text{بنزین}}} = \beta_{\text{بنزین}} \Delta T, \Delta T = \Delta \theta \rightarrow \Delta h_{\text{بنزین}} = \beta_{\text{بنزین}} h_{\text{بنزین}} \Delta \theta$$

$$\frac{\Delta h_{\text{بنزین}}}{h_{\text{بنزین}}} = \beta_{\text{بنزین}} \Delta \theta \rightarrow \frac{25}{525} = 10^{-3} \times \frac{1}{K} \Delta \theta$$

$$\frac{\Delta \theta = \theta_f - \theta_i}{\theta_i = 263 - 273 = -10^{\circ}\text{C}} \rightarrow \theta_f - (-10) = 50 \Rightarrow \theta_f = 40^{\circ}\text{C}$$

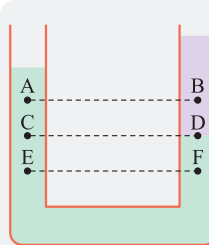
حالا θ_f را بر حسب درجه فارنهایت به دست می‌آوریم.

$$F_f = \frac{9}{5}\theta_f + 32 \xrightarrow{\theta_f = 40^{\circ}\text{C}} F_f = \frac{9}{5} \times 40 + 32 = 104^{\circ}\text{F}$$

۷۱ - گزینه ۱

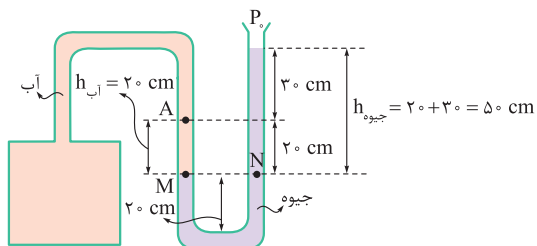


درس نامه فشار در نقاط هم‌تراز و درون یک مایع ساکن، یکسان است؛ اما اگر نقاط هم‌تراز، درون یک مایع نباشند، فشارشان با هم برابر نیست.



(هم‌ترازند ولی در یک مایع نیستند). $P_A \neq P_B$
 $P_C = P_D$
 $P_E = P_F$

در شکل زیر، نقاط M و N هم‌ترازند و درون یک مایع هستند؛ پس فشارشان با هم برابر است و می‌توانیم بنویسیم:



$$P_M = P_N \Rightarrow P_A + \rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} + P$$

$$\Rightarrow \frac{P_A - P}{\rho_{\text{آب}} g} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} - \rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}}$$

$$\frac{\rho_{\text{جیوه}} = 13600 \text{ kg/m}^3, \rho_{\text{آب}} = 1000 \text{ kg/m}^3}{g = 10 \text{ m/s}^2, h_{\text{جیوه}} = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}, h_{\text{آب}} = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}}$$

$$P_g = 13600 \times 10 \times 0.5 - 1000 \times 10 \times 0.2 = 68000 - 20000 = 48000 \text{ Pa} = 48 \text{ kPa}$$

۷۲ - گزینه ۴



درس نامه کار نیروی وزن:

شتاب گرانش (m/s^2) جرم جسم (kg) رو به پایین
 $W = \pm m g h \rightarrow (m)$ اندازه جابه‌جایی در راستای قائم رو به بالا

کار نیروی وزن به مسیر حرکت جسم بستگی ندارد و وابسته به تغییر ارتفاع جسم است. عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

(الف) در طبقه سوم، ارتفاع هر دو شخص از سطح زمین یکسان است و چون جرم آن‌ها نیز یکسان است، پس انرژی پتانسیل گرانشی آن‌ها نسبت به سطح زمین در این طبقه یکسان است. ✓

$$U = mgh \xrightarrow{\frac{m_A}{h_A} = \frac{m_B}{h_B}} U_A = U_B$$

(ب) و (پ) شخص A از طبقه دوم به طبقه سوم و شخص B از طبقه چهارم به طبقه سوم می‌رود؛ یعنی هر دو شخص به اندازه یک طبقه نسبت به مکان اولیه خود جابه‌جا شده‌اند، اما شخص A بالا و شخص B پایین رفته است. پس کار نیروی وزن شخص A منفی و کار نیروی وزن شخص B مثبت است و یکسان نیست (هواستون باشد، اندازه کار نیروی وزن‌شون یکسانه. بررسی عبارت (ت) رو ببین). (ب) و (پ) ✓

(ت) کار نیروی وزن به مسیر حرکت جسم بستگی ندارد و وابسته به تغییر ارتفاع جسم است. همان‌طور که در عبارت (ب) و (پ) توضیح دادیم، چون هر دو شخص هم‌جرم هستند و در نهایت به اندازه یک طبقه نسبت به مکان اولیه خود جابه‌جا شده‌اند، پس اندازه کار نیروی وزن آن‌ها با هم برابر است اما علامتشان قرینه یکدیگر است. ✗

$$\begin{cases} W_{mg,A} = -m_A g h \\ W_{mg,B} = +m_B g h \end{cases} \xrightarrow{m_A = m_B} \begin{cases} W_{mg,A} = -W_{mg,B} \\ |W_{mg,A}| = |W_{mg,B}| \end{cases}$$

۷۴- گزینه ۳

استراتژی تغییر دما و تغییر انرژی درونی گاز در این فرایند را بررسی کنید، سپس با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، جواب درست را پیدا کنید.

درس نامه ۱ با توجه به معادله حالت گاز کامل ($PV = nRT$)، برای مقایسه دو حالت مختلف، رابطه کلی زیر را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال ثابت فرض شده بود، از طرفین این رابطه حذف کنید.

$$\begin{aligned} \text{حجم} \uparrow & \quad \leftarrow \frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \\ \text{فشار} \leftarrow & \quad \frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \\ \text{دما (K)} \downarrow & \quad \frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \end{aligned}$$

قانون اول ترمودینامیک، در یک فرایند ایستوار، تغییر انرژی درونی گاز برابر با مجموع کار انجام شده توسط محیط روی گاز و گرمای داده شده به گاز است.

$$\begin{aligned} \text{کار محیط بر روی گاز} \uparrow \\ \Delta U = Q + W \\ \text{گرمای} \downarrow \end{aligned}$$

انرژی درونی گاز آرمانی، تابع دمای مطلق گاز است:

- ۱ اگر دمای گاز افزایش یابد: $\Delta T > 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow Q + W > 0$
- ۲ اگر دمای گاز کاهش یابد: $\Delta T < 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \Rightarrow Q + W < 0$
- ۳ اگر دمای گاز ثابت بماند: $\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow Q + W = 0 \Rightarrow |W| = |Q|$

۳ کار محیط روی گاز را با W نشان می‌دهیم. هنگام تراکم گاز، $W > 0$ و هنگام انبساط گاز، $W < 0$ است.

گام ۲ f و i یعنی نقاط شروع و پایان فرایند را به عنوان نقاط ۱ و ۲ در نظر می‌گیریم و تغییر دمای گاز را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \xrightarrow{P_2 = \frac{1}{4} P_1, n_1 = n_2} \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{\frac{1}{4} P_1 \times \Delta V_1}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{4}$$

چون $\frac{T_2}{T_1} > 1$ است، پس دمای گاز افزایش یافته است؛ در نتیجه انرژی درونی گاز نیز افزایش می‌یابد. $\Delta T > 0 \Rightarrow \Delta U > 0$

با توجه به قانون اول ترمودینامیک داریم: $\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U > 0} Q + W > 0$

بررسی سایر گزینه‌ها: با توجه به درس نامه، اگر $\Delta U < 0$ بود، به دست می‌آمد و اگر $\Delta U = 0$ بود، به دست می‌آمد.

اما چرا ۱ نادرست است؟

چون در این فرایند گاز منبسط شده است، پس $W < 0$ است و چون $\Delta U > 0$ است، پس باید $Q > 0$ و از نظر مقدار نیز بزرگ‌تر از $|W|$ باشد.

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow |W| < |Q|$$

۷۵- گزینه ۲

درس نامه ۱ در فرایندی دررو، گرما بین گاز و محیط مبادله نمی‌شود؛ یعنی $Q = 0$ است.

۲ تغییر انرژی درونی گاز در فرایند هم‌دما صفر است ($\Delta U_{\text{هم‌دما}} = 0$).

۳ در یک چرخه کامل ترمودینامیکی، تغییر انرژی درونی گاز برابر با صفر است ($\Delta U_{\text{چرخه}} = 0$).

۴ در یک انبساط هم‌فشار، گاز گرما دریافت می‌کند و دمای آن افزایش می‌یابد؛ بنابراین در این فرایند $\Delta U > 0$ است.

۵ اگر کار انجام شده توسط محیط روی گاز را با W و کار انجام شده توسط گاز روی محیط را با W' نشان دهیم، داریم:

$$W = -W'$$

قانون اول ترمودینامیک را در نظر می‌گیریم و براساس آن، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U = 0, Q = 0} 0 = Q + W \Rightarrow Q = -W \neq 0$$

یعنی گرمای مبادله شده بین گاز و محیط در تراکم هم‌دما صفر نیست.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{Q=0 \text{ بی‌دررو}} \Delta U = 0 + W \Rightarrow \Delta U = W \quad \checkmark$$

یعنی کار انجام شده روی گاز در یک فرایند بی‌دررو (چه انبساط و چه تراکم)، برابر با تغییر انرژی درونی گاز است.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U=0 \text{ چرخه کامل}} 0 = Q + W \Rightarrow W = -Q \quad \times$$

یعنی کار انجام شده روی گاز در یک چرخه کامل، قرینه گرمای داده شده به گاز است.

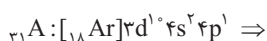
$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U > 0, W < 0} Q + W \neq 0 \xrightarrow{W = -W'} Q - W' \neq 0 \quad \times$$

یعنی گرمای داده شده به گاز در انبساط هم‌فشار، برابر با کار انجام شده توسط گاز روی محیط نیست.

شیمی

۷۶- گزینه ۲

آرایش الکترونی اتم عنصر A را نوشته و این عنصر را شناسایی می‌کنیم:



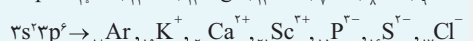
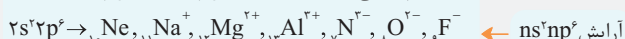
عنصر A همان فلز ${}_{31}\text{Ga}$ در گروه ۱۳ جدول تناوبی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

نکته اگر آرایش الکترونی گونه‌ای به $ns^2 np^6$ یا ns^2 ختم شود، آن گونه می‌تواند یک اتم خنثی (گاز نجیب)، یک کاتیون یا یک آنیون باشد. اگر در آرایش الکترونی یک گونه زیرلایه $(n-1)d$ وجود داشته باشد ولی زیرلایه ns وجود نداشته باشد، آن آرایش الکترونی فقط و فقط مربوط به یک کاتیون (یون مثبت) است.

آرایش $1s^2$ ← اتم خنثی هلیوم، یون مثبت (Li^+) ، یون منفی (H^-)

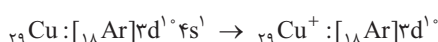
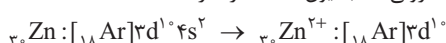
اتم خنثی (گاز نجیب)، کاتیون پایدار، آنیون پایدار



شکل صحیح $3d^1$ ← فقط یون مثبت (کاتیون)
آرایش $3d^1 \rightarrow {}_{29}\text{Cu}^+, {}_{30}\text{Zn}^{2+}, {}_{31}\text{Ga}^{3+}$

۱ یون پایدار اتم Ga^{3+} است که آرایش الکترونی آن به صورت $[{}_{18}\text{Ar}] 3d^1$ است.

در میان یون پایدار عنصرهای واسطه (فلزهای واسطه) دوره چهارم، دو یون ${}_{30}\text{Zn}^{2+}$ و ${}_{29}\text{Cu}^{+}$ (نه یک یون!) آرایش الکترونی مشابه یون Ga^{3+} را دارند.



۲ عنصر ${}_{31}\text{A}$ (همان ${}_{31}\text{Ga}$) در گروه ۱۳ و دوره ۴ جدول تناوبی قرار دارد. عدد اتمی عنصرهای قبل و بعد عنصر ${}_{31}\text{Ga}$ در گروه ۱۳ هر کدام به ترتیب، ۵ واحد از عدد اتمی گازهای نجیب دوره‌های ۳ و ۵ جدول یعنی ${}_{18}\text{Ar}$ و ${}_{54}\text{Xe}$ کم‌تر است یعنی می‌شه اعداد اتمی $13 = 18 - 5$ و $49 = 54 - 5$.

گروه ۱۳					گروه ۱۸
$18 - 5 = 13$ ← ${}_{13}\text{Al}$					${}_{18}\text{Ar}$ → دوره سوم
$36 - 5 = 31$ ← ${}_{31}\text{Ga}$					${}_{36}\text{Kr}$ → دوره چهارم
$54 - 5 = 49$ ← ${}_{49}\text{In}$					${}_{54}\text{Xe}$ → دوره پنجم

مجموع شمار الکترون‌های اتم عنصرهای قبل و بعد A در گروه ۱۳

$$= \frac{13 + 49}{2} = \frac{62}{2} = 31 = ({}_{31}\text{Ga}) {}_{31}\text{A}$$

شمار الکترون‌های اتم ${}_{31}\text{A}$ همان ${}_{31}\text{Ga}$ است.

۳) دمای بالاتر از ۴۷۳ K همان دمای بالاتر از 200°C است. در میان هالوژن‌ها، عنصر برم (Br_2)، تنها در دمای بالاتر از 200°C با هیدروژن واکنش می‌دهد. آرایش الکترونی لایه ظرفیت عناصر گروه ۱۷ (هالوژن‌ها) به صورت $ns^2 np^5$ است:

★ نکته در جدول زیر شرایط دمایی لازم برای انجام واکنش هالوژن‌ها با گاز هیدروژن، آورده شده است:

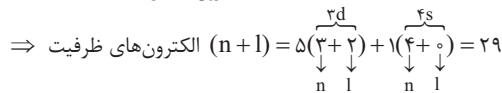
نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای 200°C به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای 200°C واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از 400°C واکنش می‌دهد.



$$\Rightarrow (n+1) = 2\left(\overset{4s}{\downarrow} + \overset{4p}{\downarrow}\right) + \overset{3d}{\downarrow} = 33$$

تا همین جا جواب سؤال پیدا شد ولی بیایید گزینه آخر رو هم بررسی کنیم:

۴) از عنصرهای دوره چهارم جدول، آرایش الکترونی دو عنصر ${}_{24}\text{Cr}$ و ${}_{29}\text{Cu}$ (از دسته d) از قاعده آفبا پیروی نمی‌کنند:



$$\Rightarrow (n+1) = 1\left(\overset{4s}{\downarrow} + \overset{4p}{\downarrow}\right) + \overset{3d}{\downarrow} = 54$$



۷۸- گزینه ۲

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

۵) بررسی سایر موارد: الف) در آرایش الکترونی عناصر دوره چهارم جدول دوره‌ای، زیرلایه $4s$ در عناصر دسته‌های s و d و زیرلایه $4p$ در عناصر دسته p، بیرونی‌ترین زیرلایه‌ها هستند. در دسته s، عنصر با آرایش الکترونی $4s^2$ و در دسته p، عنصر با آرایش الکترونی $4s^2 4p^2$ و در 10° عنصر دسته d، همه عناصر به جز دو عنصر با آرایش الکترونی $3d^5 4s^1$ و $3d^4 4s^1$ در بیرونی‌ترین زیرلایه خود، ۲ الکترون دارند؛ که مجموعاً می‌شه 10 عنصر نه ۹ عنصر!

دسته s	دسته d	دسته p
$4s^2$	$3d^x 4s^2$	$4s^2 4p^2$
(۱ عنصر)	(۸ عنصر)	(۱ عنصر)

(ب)

★ نکته

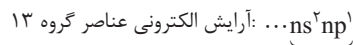
- خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.
- در یک دوره از چپ به راست
- خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.
- خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
- در یک گروه از بالا به پایین
- خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

با توجه به نکته بالا، روند تغییر خصلت فلزی و نافلزی در هر گروه و هر دوره جدول، عکس یکدیگر است.

۶) نه الزاماً! اتم ${}_{31}\text{Ga}$ (همان ${}_{31}\text{Ga}$) ۳ الکترون ظرفیتی دارد و در گروه ۱۳ جدول تناوبی قرار دارد. می‌دانیم که به جز عناصر گروه ۱۳، عناصر گروه ۳ جدول تناوبی هم ۳ الکترون ظرفیتی دارند؛ پس عنصر X می‌تواند متعلق به گروه ۳ جدول بوده و هم گروه اتم ${}_{31}\text{Ga}$ نباشد.



الکترون‌های ظرفیت



الکترون‌های ظرفیت



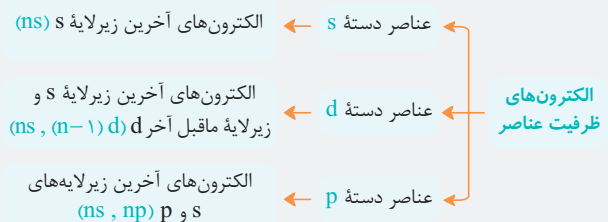
الکترون‌های ظرفیت

۷) اتم ${}_{31}\text{Ga}$ یک عنصر فلزی است. به طور معمول فلزها، تنها توانایی از دست دادن الکترون را دارند و در پیوند اشتراکی و تشکیل ترکیب‌های مولکولی شرکت نمی‌کنند.



۷۷- گزینه ۳

۱) الکترون‌های ظرفیت عناصر دسته‌های s، p، d و به صورت زیر است:

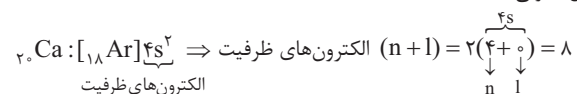


۲) جدول زیر مقدار عدد کوانتومی فرعی را برای زیرلایه‌های گوناگون نشان می‌دهد:

نوع زیرلایه	s	p	d	f
مقدار l	0	1	2	3

با توجه به خواسته سؤال، باید به دنبال اتمی باشیم که $n+1$ الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۳۳ باشد. سریع‌ترین راه بررسی گزینه‌هاست:

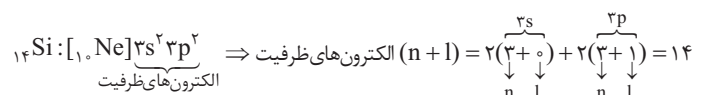
۱) در سنگ آهک (CaCO_3)، کاتیون Ca^{2+} وجود دارد. ${}_{20}\text{Ca}$ جزء فلزهای دسته s در گروه ۲ جدول تناوبی است:



۲) در میان عناصر گروه ۱۴، دو عنصر شبه‌فلزی ${}_{14}\text{Si}$ و ${}_{32}\text{Ge}$ ، رسانایی الکتریکی کمی دارند.

گروه ۱۴	رسانایی الکتریکی زیاد	رسانایی الکتریکی کم
C	دگرشکل گرافیت	دگرشکل الماس
Si	شبه‌فلز و رسانایی	
Ge	الکترونیک کم	
Sn	فلز و رسانایی	
Pb	الکترونیک زیاد	

${}_{14}\text{Si}$ و ${}_{32}\text{Ge}$ از عناصر دسته p بوده و به ترتیب در تناوب‌های ۳ و ۴ جدول قرار دارند و آرایش الکترونی لایه ظرفیت عناصر گروه ۱۴ به صورت $ns^2 np^2$ است:



الکترون‌های ظرفیت

$$\Rightarrow (n+1) = 2\left(\overset{4s}{\downarrow} + \overset{4p}{\downarrow}\right) + \overset{3d}{\downarrow} = 18$$

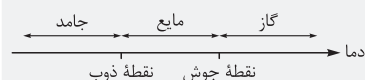
پ) عنصرهای هر گروه، خواص شیمیایی مشابه دارند نه یکسان!
 ت) **نکته** به طور کلی، رفتار شیمیایی عناصر به صورت جدول زیر است:

عناصر	رفتار شیمیایی
فلزی	اغلب قابلیت از دست دادن الکترون و تشکیل کاتیون را دارند.
نافلزی	۱) اغلب تمایل به گرفتن الکترون و تشکیل آنیون را دارند. ۲) تمایل به اشتراک گذاشتن الکترون دارند.
شبه فلزی	تنها تمایل به اشتراک گذاشتن الکترون در واکنش با دیگر اتمها را دارند.

تفاوت جرم مولی مولکولهای «الف» و «پ» و هم چنین مولکولهای «پ» و «ت»، برابر با جرم مولی اتن (C_4H_8) است. یعنی هم ۱) درسته و هم ۲) و این سوال کلنور دو پاسخ صحیح داره!

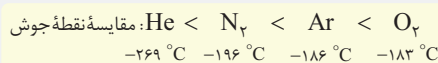
۸۱- گزینه ۳

درسنامه ۱) هر ماده‌ای در دماهای پایین‌تر از نقطه ذوب خود به حالت جامد، در دماهای بالاتر از نقطه جوش خود به حالت گاز و بین این دو دما (نقطه ذوب و جوش) به حالت مایع است. مثلاً آب در دماهای کمتر از $0^\circ C$ جامد، در دماهای بالاتر از $100^\circ C$ به حالت گاز و در دماهای بین صفر و $100^\circ C$ درجه سلسیوس (مثلاً دمای اتاق، $25^\circ C$) به حالت مایع است.



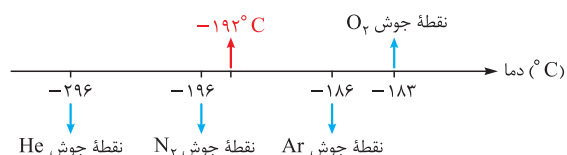
۲) اگر مقایسه نقطه جوش دو ماده گازی A و B به صورت $A > B$ باشد، هنگام مایع کردن این دو گاز، ابتدا A که نقطه جوش بالاتری دارد، مایع می‌شود ولی اگر بخواهیم A و B مایع را به گاز تبدیل کنیم، ابتدا B که نقطه جوش پایین‌تری دارد، به گاز تبدیل می‌شود.

۳) ترتیب نقطه جوش چهار گاز هوا که شما باید بدوین به صورت زیر است:



موارد «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی همه موارد: الف) دمای $-192^\circ C$ بالاتر از نقطه جوش نیتروژن ($-196^\circ C$) و پایین‌تر از نقطه جوش آرگون ($-186^\circ C$) و اکسیژن ($-183^\circ C$) است؛ بنابراین در این دما، N_2 به صورت گاز و Ar و O_2 به صورت مایع هستند.



ب) اولاً که در مخلوط گاز طبیعی، گاز نجیب He وجود دارد نه گاز نجیب Ar! ثانیاً در اوایل فصل ۲ کتاب شیمی دهم می‌خوانیم که جداسازی هلیوم از گاز طبیعی به دانش و فناوری پیشرفته‌ای نیاز دارد که هنوز متخصصان کشورمان موفق به دستیابی به این فناوری و جداسازی هلیوم از گاز طبیعی نشده‌اند.

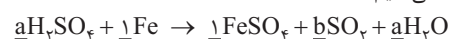
پ) هلیوم در کره زمین به مقدار خیلی کم یافت می‌شود، به طوری که مقدار ناچیزی از آن در هواکره وجود دارد و مقدار بیشتری در لایه‌های زیرین پوسته زمین، از واکنش‌های هسته‌ای در اعماق زمین تولید می‌شود. به همین دلیل منابع زمینی آن از هواکره سرشارتر و برای تولید هلیوم در مقیاس صنعتی مناسب‌ترند.

ت) نقطه جوش هلیوم $-269^\circ C$ است و این گاز در دماهای بالای $-269^\circ C$ مانند دمای $-200^\circ C$ به حالت گاز است نه مایع!

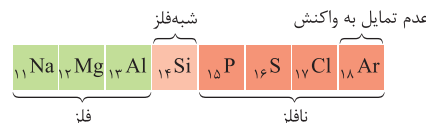
۸۲- گزینه ۲

گام ۱) ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:

روش ۱) موازنه به روش واری و استفاده از ضرایب مجهول: موازنه را با اتم Fe در ترکیب $FeSO_4$ شروع کرده و به $FeSO_4$ ضریب ۱ می‌دهیم، بنابراین ضریب Fe در سمت چپ برابر (۱) می‌شود. در ادامه موازنه را با هیچ‌یک از عناصر S، O و H نمی‌توان ادامه داد؛ بنابراین از ضرایب مجهول استفاده می‌کنیم:



به طور کلی عنصری که فقط با اشتراک گذاشتن الکترون می‌تواند به آرایش الکترونی گاز نجیب برسد، شبه فلز است. در عناصر دوره سوم جدول دوره‌ای، تنها Si، شبه فلز بوده و با اشتراک گذاشتن الکترون می‌تواند به آرایش گاز نجیب Ar برسد.



۷۹- گزینه ۱

درسنامه توصیف یک نمونه گاز

در بررسی رفتار و قوانین گازها، ما با ۴ کمیت: مقدار یا تعداد مول (n)، دما (T)، فشار (P) و حجم گاز (V) سروکار داریم. حجم (یا به طور کلی هر یک از کمیت‌ها برای یک نمونه گاز با تغییر هر یک از سه کمیت دیگر، تغییر می‌کند؛ بنابراین برای توصیف یک نمونه گاز، علاوه بر مقدار، باید دما و فشار آن (۳ کمیت از ۴ کمیت گفته شده) نیز مشخص شود.

دما (T) و فشار (P) و حجم (V) گاز

$$V \propto \frac{nT}{P}$$

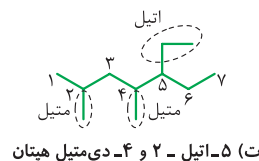
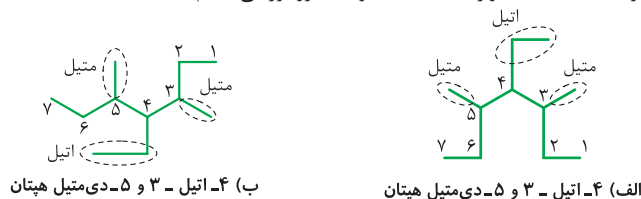
فشار گاز

با توجه به توضیحات داده شده تنها ۱) درباره توصیف یک نمونه گاز درست است؛ زیرا مقدار $1/6$ گرم، دما $200^\circ C$ و فشار (۱ atm) گاز در آن مشخص شده است.

۸۰- گزینه او ۲

شفاف سازی یکسان بودن فرمول ساختاری دو ترکیب، یعنی دو ساختار یکسان بوده و مربوط به یک نوع ترکیب است. (اگر ساختارها را نام گذاری کنیم، هر دو ساختار، نام یکسانی دارند.)

گام ۱) برای این که بتوانیم راحت تر تشخیص بدیم که کدام ترکیبها فرمول ساختاری یکسانی دارند و در واقع مربوط به یک ترکیب هستند، باید آن‌ها را نام گذاری کنیم، با توجه به گزینه‌ها، فقط باید موارد «الف»، «ب» و «ت» رو بررسی کنیم:



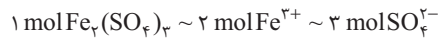
فرمول‌های ساختاری «الف» و «ب» یکسان و مربوط به یک ترکیب (۴-اتیل - ۳ و ۵-دی متیل هپتان) است. پس تا این جا ۳) و ۴) پُر!

گام ۲) برای قسمت دوم سؤال، با توجه به این که همه ساختارهای داده شده مربوط به آلکان‌ها با فرمول عمومی C_nH_{2n+2} هستند، باید با توجه به شمار اتم‌های کربن هر ساختار، فرمول مولکولی آن را به دست آوریم و ببینیم که تفاوت فرمول مولکولی کدام دو ترکیب برابر با فرمول مولکولی اولین عضو خانواده آلکان‌ها یعنی اتن (C_2H_4) است.

۸۴ - گزینه ۲

گام ۱ ابتدا از روی جرم یون سولفات، شمار مول‌های آهن (III) سولفات و شمار مول‌های یون Fe^{3+} در آن را، به دست می‌آوریم.

فرمول شیمیایی آهن (III) برمید و آهن (III) سولفات به ترتیب به صورت FeBr_3 و $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ است. در $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ به ازای ۳ مول یون SO_4^{2-} ، ۲ مول یون Fe^{3+} وجود دارد، بنابراین:



$$8/64 \text{ g SO}_4^{2-} \times \frac{1 \text{ mol SO}_4^{2-}}{96 \text{ g SO}_4^{2-}} = 0/09 \text{ mol SO}_4^{2-}$$

$$\Rightarrow 0/09 \text{ mol SO}_4^{2-} \begin{cases} \times \frac{1 \text{ mol Fe}_2(\text{SO}_4)_3}{3 \text{ mol SO}_4^{2-}} = 0/03 \text{ mol Fe}_2(\text{SO}_4)_3 \\ \times \frac{2 \text{ mol Fe}^{3+}}{3 \text{ mol SO}_4^{2-}} = 0/06 \text{ mol Fe}^{3+} \end{cases}$$

گام ۲ شمار مول‌های Fe^{3+} را در FeBr_3 به دست می‌آوریم. با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال، شمار مول‌های FeBr_3 ، ۲ برابر شمار مول‌های $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ ، یعنی $0/06$ است.

با توجه به فرمول FeBr_3 ، به ازای هر مول FeBr_3 ، ۱ مول یون Fe^{3+} وجود دارد؛ پس شمار مول‌های Fe^{3+} در FeBr_3 برابر با $0/06$ مول است.

گام ۳ حالا مجموع شمار مول‌های Fe^{3+} را در محلول به دست می‌آوریم و با استفاده از فرمول ppm، غلظت یون Fe^{3+} را حساب می‌کنیم:

$$\text{مجموع شمار مول‌های Fe}^{3+} = 0/06 + 0/06 = 0/12 \text{ mol}$$

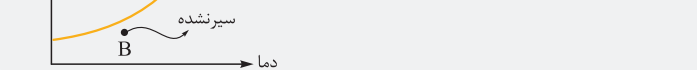
$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{0/12 \text{ mol Fe}^{3+} \times \frac{56 \text{ g}}{1 \text{ mol Fe}^{3+}}}{\frac{4}{100} \text{ g}} \times 10^6 = 16800$$

۸۵ - گزینه ۴

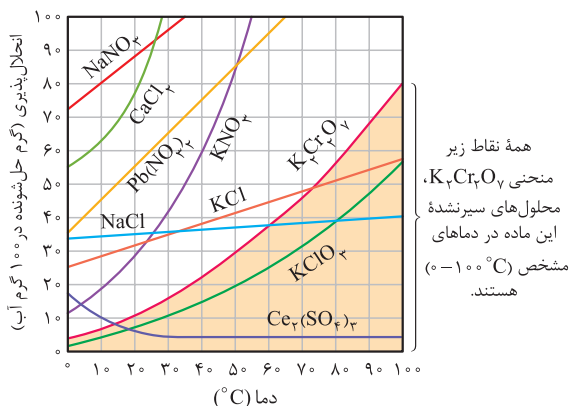
درس‌نامه جایگاه محلول‌های سیرشده، سیرنشده و فراسیرشده در نمودار انحلال‌پذیری

به‌نموداری که اثر دما بر انحلال‌پذیری یک ماده‌نشان می‌دهد، منحنی انحلال‌پذیری-دمای گویند.

هر نقطه روی منحنی، نشان‌دهنده محلول سیرشده (نقطه A)، هر نقطه زیر منحنی نشان‌دهنده محلول سیرنشده (نقطه B) و هر نقطه بالای منحنی نشان‌دهنده یک محلول فراسیرشده (نقطه C) در آن دما است.



هر نقطه زیر منحنی انحلال‌پذیری $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ ، نشان‌دهنده یک محلول سیرنشده از این ماده در آن دما است، بنابراین با توجه به نمودار، دمای محلول سیرنشده A (یعنی m) می‌تواند صفر تا 100°C درجه سانتی‌گراد باشد.



از آن‌جا که اتم H در سمت چپ فقط در ساختار H_2SO_4 و در سمت راست فقط در ساختار H_2O وجود دارد، ضریب این دو ماده باید برابر بوده و آن را a قرار می‌دهیم.

$$(1) \quad a = 1 + b \Rightarrow \text{تعداد اتم‌های S در سمت راست} = \text{تعداد اتم‌های S در سمت چپ}$$

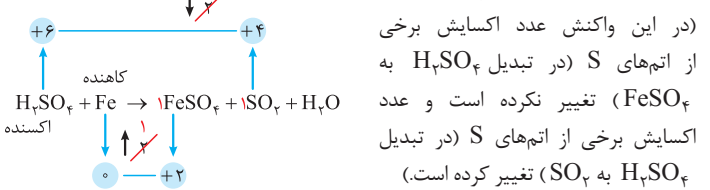
$$(2) \quad 4a = 4 + 2b + a \Rightarrow \text{تعداد اتم‌های O در سمت راست} = \text{تعداد اتم‌های O در سمت چپ}$$

$$\begin{cases} a = 1 + b \\ 3a = 4 + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a = -2 - 2b \\ 3a = 4 + 2b \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1$$



روش موازنه به روش تغییر عدد اکسایش:

به طور کلی برای موازنه واکنش‌های اکسایش - کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده را ضریب گونه اکسندۀ و مقدار تغییر عدد اکسایش گونه اکسندۀ را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم. البته باید دقت کنیم که اگر مانند این واکنش، در سمت چپ معادله، عنصری وجود داشته باشد (مانند S) که عدد اکسایش برخی از اتم‌های آن تغییر کرده و عدد اکسایش برخی دیگر از اتم‌های آن تغییری نکرده باشد، موازنه را باید از سمت راست و از گونه‌ای که عدد اکسایش اتم در آن تغییر کرده، شروع کنیم. یعنی تغییر عدد اکسایش گونه‌های اکسندۀ و کاهندۀ را باید ضریب مواد در سمت راست آن قرار دهیم:



حالا با توجه به ضرایب معلوم، ضرایب بقیه مواد را تعیین می‌کنیم:



گام ۲ جرم محلول H_2SO_4 و درصد جرمی H_2SO_4 در محلول را داریم؛ بنابراین به راحتی با استوکیومتری ساده می‌توانیم به جرم Fe مصرفی برسیم:

روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \times \frac{\text{درصد جرمی}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{200 \text{ g}}{98 \text{ g/mol} \times 2} \times \frac{4/9}{100} = \frac{x}{56 \text{ g/mol} \times 1} \Rightarrow x = \frac{200 \times 4 \times 56}{98 \times 2 \times 100} = 2/8 \text{ g Fe}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

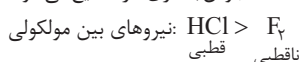
$$200 \text{ g محلول} \times \frac{4/9 \text{ g H}_2\text{SO}_4}{100 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4}{98 \text{ g H}_2\text{SO}_4} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{2 \text{ mol H}_2\text{SO}_4} = 2/8 \text{ g Fe}$$

۸۳ - گزینه ۳

موارد «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی همه موارد: الف) میله شیشه‌ای مالش داده شده به موی سر، بار منفی دارد؛ بنابراین مولکول‌های آب از سر مثبت (اتم‌های H)، جذب آب می‌شوند، نه سر منفی!

ب) هنگام مایع کردن (سرد کردن) دو گاز، ابتدا گازی که نقطه جوش بالاتری دارد، مایع می‌شود:



$\Rightarrow \text{HCl}$ زودتر و آسان‌تر مایع می‌شود. $\Rightarrow$ نقطه جوش $\text{HCl} > \text{F}_2$

پ) مولکول‌های ناقطبی گاز CO_2 با آب واکنش می‌دهند، در حالی که گاز قطبی NO هنگام انحلال در آب، با آن واکنش نمی‌دهد.

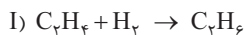
ت) گشتاور دوقطبی مولکول‌های H_2O و H_2S به ترتیب برابر با $1/85 \text{ D}$ و $0/97 \text{ D}$ است و این یعنی میزان قطبیت مولکول‌های آب و در نتیجه نیروهای بین مولکولی آن، تقریباً دو برابر مولکول‌های هیدروژن سولفید است.

به بالاتر بودن نمودار $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ نسبت به $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ ، می‌گویم به! اما در ① فقط گفته در دمای 20°C ، محلول سیرشده از CaCl_2 نمی‌تونیم داشته باشیم که همان‌طور که قبلاً توضیح دادیم، با تغییر مقدار نمک، می‌توانیم محلول سیرشده از این ماده، تهیه کنیم.

۸۶- گزینه ۱

استراتژی ابتدا واکنش اتن و اتین را با گاز هیدروژن بنویس و موازنه کن. مول اتن و اتین را برابر با X در نظر بگیر و به مجموع مول گاز H_2 مصرف شده در دو واکنش برس. تمام شد ریه! به راحتی می‌تونی جرم گاز اتن رو محاسبه کنی.

گام ۶ واکنش گاز اتن و اتین با H_2 به صورت زیر است:



گام ۳: اگر x مول C_2H_4 در واکنش (I) مصرف شود، x مول H_2 مصرف می‌شود و اگر x مول گاز اتین در واکنش (II) مصرف شود، $2x$ مول گاز H_2 مصرف می‌شود؛ بنابراین مقدار گاز H_2 مصرف‌شده برابر با $3x$ مول است. اکنون می‌توان نوشت:

$$x \text{ mol H}_2 \times \frac{2 \text{ g H}_2}{1 \text{ mol H}_2} = 0.5 \Rightarrow x = 0.5 \text{ mol H}_2$$

گام ۷ جرم گاز اتن برابر است با:

$$0.1 \text{ mol C}_7\text{H}_f \times \frac{98 \text{ g C}_7\text{H}_f}{1 \text{ mol C}_7\text{H}_f} = 9.8 \text{ g C}_7\text{H}_f$$

۸۷- گزینه ۳

درس‌نامه شبه‌فلزهای جدول تناوبی:

◆ شبه‌فلزها در جدول دوره‌ای همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند.

عنصرهایی که در سمت راست این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، نافلز و عنصرهایی که در سمت چپ این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، فلز هستند (البته به‌جز هیدروژن که یک نافلز است).

♦ بدانید و آگاه باشید! که در هر دوره (به جز دوره اول که شامل H و He است و دوره هفتم که حند عنصر با بزرگ های نامشخص، دره!) حداقل یک عنصر شبه فلز وجود دارد.

◆ همهٔ شبه‌فلزها در دستهٔ p جدول دوره‌ای قرار دارند.

♦ مجموعاً ۸ عنصر شبه فلز در جدول تناوبی وجود دارد که عبارت اند از: بور (B)، سیلیسیم (Si)، ژرمانیم (Ge)، آرسنیک (As)، آنتیموان (Sb)، تلوریم (Te)، پولونیم (Po) و استاتین (At).

دوره دوم	B						
دوره سوم		Si					
دوره چهارم		Ge	As				
دوره پنجم			Sb	Te			
دوره ششم				Po	At		
	گروه ۱۲	گروه ۱۴	گروه ۱۵	گروه ۱۶	گروه ۱۷		

۱ در هر یک از دوره‌های دوم و سوم، تنها یک شبه‌فلز وجود دارد.

۲ در هر یک از دوره‌های چهارم، پنجم و ششم، دو شبه‌فلز وجود دارد.

۳ در هر یک از گروه‌های ۱۳ و ۱۷، تنها یک شبه‌فلز وجود دارد.

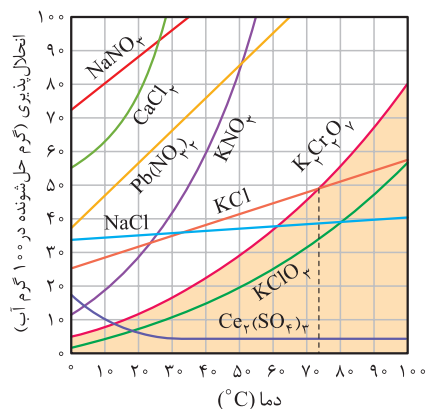
۴ در هر یک از گروه‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۶، دو شبه‌فلز وجود دارد.

بررسی گزینۀ ها: ۱ دیدید که m می تواند دمای °C تا °C ۱۰۰ باشد. فرض کنید m, °C ۲۰ باشد با توجه به نمودار، در دمای °C ۲۰ اگر حدود ۷۵ گرم CaCl_2 را در ۱۰۰ گرم آب حل کنیم، محلول سیرشدهٔ این نمک در این دما به دست می آید. پس این گزینۀ غلطه!

۲) دمای محلول NaNO_3 چه ربطی به دمای محلول $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ دارد؟!

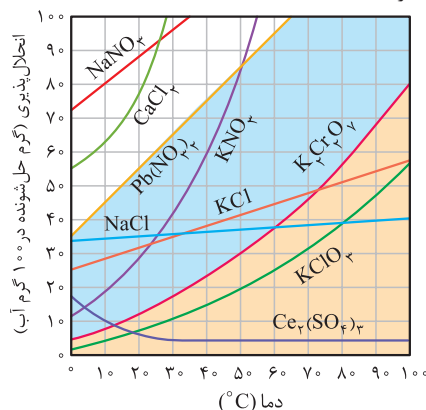
۳) هر نقطه روی نمودار KCl، محلول سیرشده آن را در دمای مشخص نشان می‌دهد. دمای محل تلاقی دو منحنی $K_2Cr_2O_7$ و KCl، حدود $73^\circ C$ است. تا قبل از این دما،

منحني KCl بالاتر از منحنی $K_2Cr_2O_7$ قرار دارد و هر نقطه روی منحنی KCl (محلول سیرشده KCl) می‌شه نقطه‌ای بالاتر از منحنی $K_2Cr_2O_7$ یعنی یک محلول فراسیرشده از $K_2Cr_2O_7$. ولی بعد از دمای $^{\circ}C 73$ ، منحنی KCl پایین منحنی $K_2Cr_2O_7$ قرار می‌گیرد و هر نقطه روی منحنی KCl (محلول سیرشده KCl) می‌شه نقطه‌ای پایین‌تر از منحنی $K_2Cr_2O_7$ ؛ یعنی یک محلول سیرنشده از $K_2Cr_2O_7$.



پس برای این که در دمای m ، (در شرایط یکسان یعنی به ازای جرم حل‌شونده و حلال یکسان) محلول دارای نمک KCl ، سیر شده و محلول دارای نمک $K_2Cr_2O_7$ سیر نشده باشد، m باید بیشتر از $73^\circ C$ باشد $m > 73^\circ C$.

۴) با توجه به نمودار در بازه دمایی ۰ تا ۱۰۰ درجه سانتی گراد، منحنی $Pb(NO_3)_2$ بالاتر از منحنی $K_2Cr_2O_7$ قرار دارد، بنابراین هر نقطه‌ای پایین‌تر از منحنی $K_2Cr_2O_7$ (محلول سیر نشده $K_2Cr_2O_7$) می‌شه نقطه‌ای پایین‌تر از منحنی $Pb(NO_3)_2$ یعنی یک محلول سیر نشده از $Pb(NO_3)_2$. پس می‌توان گفت در شرایط یکسان (یعنی به ازای جرم حل‌شونده و حلال و دمای یکسان) محلول سیر نشده $K_2Cr_2O_7$ (محلول A)، هر محلولی از $Pb(NO_3)_2$ سیر نشده است.

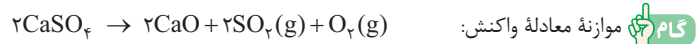


تله تفاوت ۱ و ۴ در اینه که در ۱ فقط دمای دو محلول را باید یکسان در نظر بگیریم، اما در ۴ علاوه بر دما باید جرم حل‌شونده و حلال، یکسان در نظر گرفته شود. فرض کنید در دمای 20°C ، ۵ گرم $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ در ۱۰۰ گرم آب حل کرده‌ایم و یک محلول سیرنشده به دست آمده است. حالا ۴ داره می‌گه اگر در همین دما، ۵ گرم $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ در ۱۰۰ گرم آب حل کنیم، باز هم محلول سیرنشده خواهد بود؟ که با توجه

۱- اگر از دمای 70°C تا 100°C به تقریب دو منحنی $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ و $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ را موازی در نظر بگیریم، در بازه دمایی 0°C تا 100°C ، منحنی $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ بالای منحنی $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ قرار دارد.

۸۸ - گزینه ۲

استراتژی ابتدا واکنش رو موازنه کن و سپس از روی مجموع حجم گازهای تولیدشده، جرم خالص CaSO_4 رو محاسبه کن. برای ادامه فقط کافیست حواست باشه که جرم ماده ناخالص، از مجموع جرم خالص ماده و ناخالصی‌های موجود در آن به دست می‌آید. با دقت به این موضوع، می‌تونی به راحتی درصد خلوص CaSO_4 رو محاسبه کنی.



گام ۲ به دست آوردن جرم خالص CaSO_4 :



$$\frac{\text{جرم خالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مجموع حجم دو گاز}}{22.4 \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{\text{CaSO}_4}{\text{CaSO}_4} = \frac{22.4}{(\text{SO}_2 + \text{O}_2)}$$

نکته در مسائل استوکیومتری واکنش، در مواردی که به جای حجم یک ماده گازی، مجموع یا تفاوت حجم دو ماده، خواسته یا داده می‌شود. کسر تناسب مربوط به حجم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\text{حجم مولی گازها} \times (\text{مجموع ضرایب دو ماده گازی})}{\text{حجم مولی گازها} \times (\text{تفاوت ضرایب دو ماده گازی})} = \frac{\text{مجموع حجم دو گاز}}{\text{تفاوت حجم دو گاز}}$$

$$\frac{\text{حجم مولی گازها} \times (\text{تفاوت ضرایب دو ماده گازی})}{\text{حجم مولی گازها} \times (\text{مجموع ضرایب دو ماده گازی})} = \frac{\text{تفاوت حجم دو گاز}}{\text{مجموع حجم دو گاز}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2 \times 136} = \frac{13.44}{(2+1) \times 22.4} \Rightarrow x = 0.2 \times 2 \times 136$$

$$= 54.4 \text{ g CaSO}_4 \text{ خالص}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$13.44 \text{ L گاز} \times \frac{1 \text{ mol گاز}}{22.4 \text{ L گاز}} \times \frac{2 \text{ mol CaSO}_4}{3 \text{ mol گاز}} \times \frac{136 \text{ g CaSO}_4}{1 \text{ mol CaSO}_4}$$

$$= 54.4 \text{ g CaSO}_4 \text{ خالص}$$

گام ۳ به دست آوردن درصد خلوص CaSO_4 :

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 \Rightarrow \frac{54.4}{54.4 + 13.6} \times 100$$

$$= \frac{54.4}{68} \times 100 = 80\%$$

تله بچه‌ها اگر از روش کسر تناسب استفاده می‌کنید، باید حواستون باشه که در این مسئله جرم ماده ناخالص به شما داده نشده و فقط جرم ناخالصی‌های ماده ناخالص رو دارید. اگر در کسر تناسب مربوط به ماده CaSO_4 ، به اشتباه رابطه درصد خلوص را وارد کنید و به اشتباه به جای جرم ناخالص CaSO_4 (که مجموع جرم خالص CaSO_4 و ناخالصی‌هاست)، مقدار ناخالصی اون؛ یعنی 13.6 گرم را قرار بدید، به پاسخ نمی‌رسید!

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{مجموع حجم دو گاز}}{22.4 \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{13.6 \times x}{100} = \frac{13.44}{3 \times 22.4} \Rightarrow x = 400\%$$

۸۹ - گزینه ۴

درس‌نامه واکنش‌های گرماده، با آزادسازی انرژی همراهاند و سطح انرژی فرآورده‌ها در آن‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است. در حالی که واکنش‌های گرماگیر، با جذب انرژی همراه هستند و سطح انرژی فرآورده‌ها در آن‌ها بالاتر از واکنش‌دهنده‌هاست.

حالت فیزیکی عناصر جدول تناوبی:

◀ نافلرها:

I _۲ , Se, S, P, C	جامد
فقط Br _۲	مایع
Cl _۲ , F _۲ , O _۲ , N _۲ , H _۲ و گازهای نجیب: Rn, Xe, Kr, Ar, Ne, He	گاز

حالت فیزیکی
نافلزهای جدول تناوبی
در دما و فشار اتاق

◀ فلزها و شبه‌فلزها: در دما و فشار اتاق، به جز فلز جیوه (Hg)، بقیه فلزها جامدند. حالت فیزیکی هر ۸ شبه‌فلز جدول تناوبی هم در دما و فشار اتاق، جامد است.

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

گام ۱ شناسایی موقعیت شبه‌فلز A در جدول تناوبی:

۱ عنصر A یک شبه‌فلز است و از آن‌جا که شبه‌فلزهای جدول تناوبی در گروه‌های ۱۳ تا ۱۷ جدول قرار دارند؛ این عنصر در یکی از این گروه‌ها، قرار دارد.

۲ در گروه شامل A، فقط یک عنصر گازی

۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
	C	N	O	F	Ne
		P	S	Cl	Ar
			Se	Br	Kr
				I	Xe
					Rn

فلز

نافلز

شبه‌فلز

وجود دارد: با توجه به این که تنها حالت فیزیکی بعضی از نافلزهای جدول تناوبی، گازی است؛ می‌توان دریافت که این گروه می‌تواند یکی از گروه‌های ۱۵ یا ۱۶ جدول تناوبی باشد. (گروه‌های ۱۳ و ۱۴ که فاقد عنصر گازی‌اند. گروه ۱۷ هم شامل ۲ عنصر نافلز گازی F_۲ و Cl_۲ است نه یکی!)

گام ۲ بررسی عبارت‌ها: الف) دیدیم که شبه‌فلز A می‌تواند مانند P ۱۵ در گروه ۱۵ جدول تناوبی باشد، یعنی قسمت اول این عبارت درست است. فسفر در دوره سوم جدول است و Si، تنها شبه‌فلز این دوره، در گروه ۱۴ قرار دارد نه ۱۵! پس قسمت دوم این عبارت هم درست است. ب) گوگرد در گروه ۱۶ جدول تناوبی جای دارد. شبه‌فلزهای این گروه در دوره‌های ۵ و ۶ قرار دارند و اعداد اتمی آن‌ها مانند بقیه عناصر گروه ۱۶، ۲ واحد کمتر از گاز نجیب هم‌دوره آن‌ها است یعنی:

$$\begin{aligned} \uparrow \\ \text{عدد اتمی شبه‌فلز تناوب ۵ از گروه ۱۶} &\Rightarrow 52 - 2 = 54 \Rightarrow (I) \\ \text{عدد اتمی گاز نجیب تناوب ۶} &\Rightarrow (Rn)_{86} \\ \uparrow \\ \text{عدد اتمی شبه‌فلز تناوب ۶ از گروه ۱۶} &\Rightarrow 84 - 2 = 86 \Rightarrow (2) \end{aligned}$$

در حالت (۱)، عدد اتمی شبه‌فلز (A) ۵۲، از عدد اتمی عنصر M_{53} کوچک‌تر است، نه بزرگ‌تر! پس این عبارت غلطه! و تا همین‌جا پاسخ تست (۳) پیدا شد. ولی بیایید دو عبارت بعدی رو هم بررسی کنیم.

ب) نخستین نافلز جدول دوره‌ای، کربن است که در گروه ۱۴ قرار دارد. با توجه به اطلاعات سؤال، شبه‌فلز A می‌تواند متعلق به گروه‌های ۱۵ و ۱۶ جدول باشد نه گروه ۱۴!

ت) هالوژن جامد جدول (ید I_۲)، در تناوب پنجم قرار دارد. اگر عدد اتمی شبه‌فلز A (که متعلق به گروه ۱۵ یا ۱۶ جدول است)، از عدد اتمی ید بزرگ‌تر باشد، شبه‌فلز A در تناوب ششم و در گروه ۱۶ جدول قرار دارد و عدد اتمی آن ۲ واحد کمتر از گاز نجیب Rn ۸۶ بوده و برابر با ۸۴ است. از طرفی دومین فلز در گروه ۱۴، Pb_{82} است که عدد اتمی آن از ۸۴ کوچک‌تر است. پس این عبارت درسته!

گروه ۱۴

۶C

۱۴Si

۲۲Ge

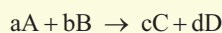
۵۰Sn

۸۲Pb

دومین فلز گروه ۱۴

مشاوره راستش اکثر بچه‌ها نتونستن این سؤال رو سر جلسه کنکور پاسخ بدن. در واقع بدون شناخت کامل ۸ عنصر شبه‌فلز جدول تناوبی، نمی‌تونستید به این سؤال پاسخ بدید. در جدول تناوبی کتاب‌های درسی نظام قدیم، این ۸ عنصر شبه‌فلزی مشخص شده بودند ولی در هیچ‌کدام از کتاب درسی جدید، همه این شبه‌فلزها معرفی یا مشخص نشده‌اند. پی‌گیریم؟

۲) سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده شرکت کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن در معادله موازنه شده، به دست می آید:



$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

۳) با استفاده از کاتالیزگر، سرعت واکنش افزایش می یابد. با توجه به رابطه سرعت متوسط واکنش با سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد شرکت کننده در واکنش (رابطه بالا)، می توان دریافت که استفاده از کاتالیزگر، سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد در واکنش را نسبت به ضرایب استوکیومتری آن ها افزایش می دهد، نه به یک اندازه!

در این واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تغییر مول های ماده A، ۳ برابر سرعت متوسط تغییر مول های D است پس می توان نوشت:

$$\frac{\bar{R}_A}{\bar{R}_D} = 3$$

از آن جا که سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد در یک واکنش، با ضرایب استوکیومتری آن ها متناسب است، می توان گفت در معادله این واکنش، ضریب استوکیومتری A، ۳ برابر ضریب استوکیومتری D است.

۴) بررسی سایر گزینه ها: ۱) کاتالیزگر، سرعت متوسط تغییر مول های مواد (A و D) را به یک نسبت (به نسبت ضرایب استوکیومتری آن ها) افزایش می دهد، نه به یک اندازه!

۲) سؤال که نگفته ضریب استوکیومتری ماده D برابر ۱ است!

ممکن است که ضریب A، ۶ و ضریب D، ۲ باشد. در این حالت نیز، نسبت ضرایب A به D برابر ۳ خواهد بود، ولی سرعت واکنش $\frac{1}{3}$ سرعت متوسط تولید یا مصرف ماده D است.

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_D}{\text{ضریب استوکیومتری D در معادله واکنش}}$$

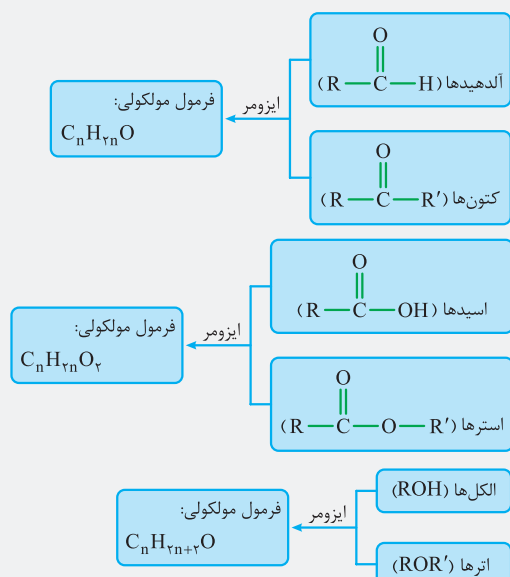
۴) اصلاً مشخص نیست که هر کدام از مواد A و D، واکنش دهنده یا فرآورده واکنش هستند و نمی توان در این باره اظهار نظر کرد.

۹۲- گزینه ۴

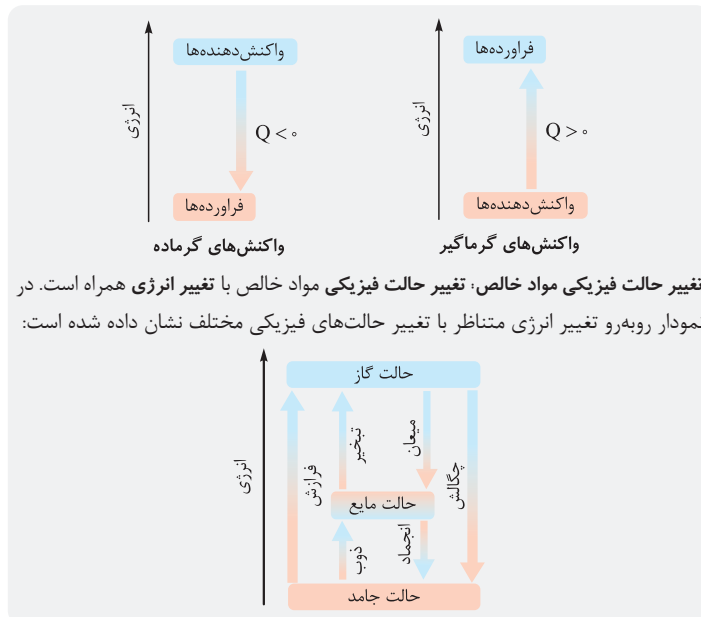
درس نامه ایزومر یا هم پار در ترکیب های آلی با گروه های عاملی اکسیژن دار:

♦ شیمی دان ها به موادی که فرمول مولکولی یکسان اما ساختار متفاوتی دارند، ایزومر (هم پار) می گویند.

♦ در تعداد کربن برابر، به شرط این که گروه های هیدروکربنی (R و R') متصل به گروه های عاملی، سیر شده و غیر حلقوی باشند، الکل ها و اترهای یک عاملی با هم، آلدئیدها و کتون های یک عاملی با هم و اسیدها و استرها یک عاملی با هم، ایزومر هستند.



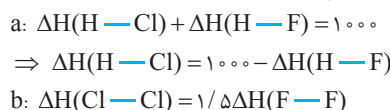
فرمول مولکولی $C_nH_{2n+2}O$ می تواند مربوط به یک الکل یا اتر سیر شده باشد. فرمول ساختاری الکل ها به صورت $R-OH$ و فرمول ساختاری اترها به صورت $R-O-R'$ است



هر دو فرایند ذوب (تبدیل حالت فیزیکی جامد به مایع) و فرازش (تبدیل حالت فیزیکی جامد به گاز) گرماگیر و با افزایش سطح انرژی همراه اند، در حالی که فرایند میعان (تبدیل حالت فیزیکی گاز به مایع) گرماده بوده و با کاهش سطح انرژی همراه است.

۹۰- گزینه ۲

گام ۱) براساس اطلاعات داده شده در سؤال، می توان نوشت:



گام ۲) براساس واکنش اول $\Delta H(H-H) = 435 \text{ kJ.mol}^{-1}$ است. حالا اگر رابطه ΔH واکنش های دوم و سوم را براساس آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده و فرآورده بنویسیم، خواهیم داشت:

★ نکته مقدار ΔH یک واکنش گازی را می توان از طریق آنتالپی های پیوند در مواد واکنش دهنده و فرآورده، به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فرآورده}]$$

$$\begin{aligned} \text{برای واکنش دوم} \quad & [435 + \Delta H(Cl-Cl)] - [2\Delta H(H-Cl)] = -186 \\ \Rightarrow \Delta H(Cl-Cl) - 2\Delta H(H-Cl) &= -621 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{برای واکنش سوم} \quad & [435 + \Delta H(F-F)] - [2\Delta H(H-F)] = -544 \\ \Rightarrow \Delta H(F-F) - 2\Delta H(H-F) &= -979 \end{aligned}$$

گام ۳) اگر موارد a و b را در معادله به دست آمده برای واکنش دوم قرار دهیم، با تشکیل دستگاه برای معادله حاصل با معادله به دست آمده برای واکنش سوم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 1/5 \Delta H(F-F) - 2(1000 - \Delta H(H-F)) &= -621 \\ \begin{cases} 1/5 \Delta H(F-F) - 2000 + 2\Delta H(H-F) &= -621 \\ \Delta H(F-F) - 2\Delta H(H-F) &= -979 \end{cases} \\ \Rightarrow 2/5 \Delta H(F-F) &= 400 \Rightarrow \Delta H(F-F) = 1000 \end{aligned}$$

۹۱- گزینه ۱

★ نکته ۱) سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد در یک واکنش، با ضرایب استوکیومتری آن ها متناسب است. برای مثال اگر ضرایب استوکیومتری مواد X و Y در معادله یک واکنش به ترتیب ۶ و ۳ باشند، سرعت متوسط تولید یا مصرف ماده X، ۲ برابر سرعت متوسط تولید یا مصرف ماده Y خواهد بود.

پ) عدد اکسایش اتم‌های کربن ستاره‌دار در دو ساختار قبل، برابر صفر است. شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش صفر در ترکیب (a)، ۳ و در ترکیب (b) ۱ بوده و برابر نیستند.

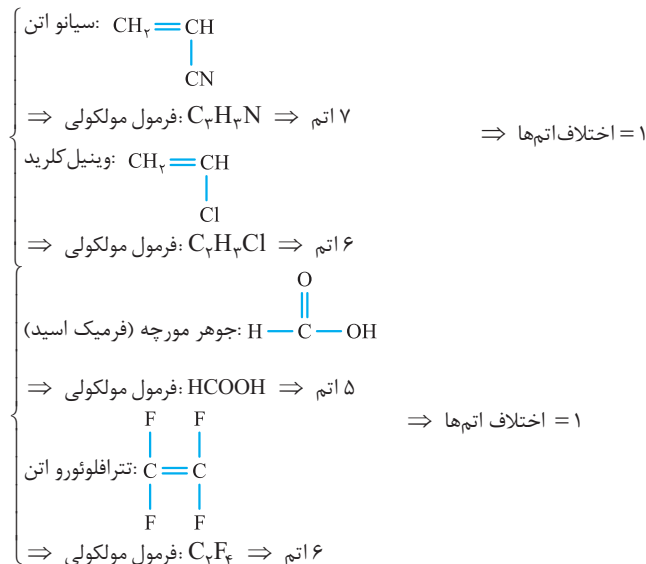
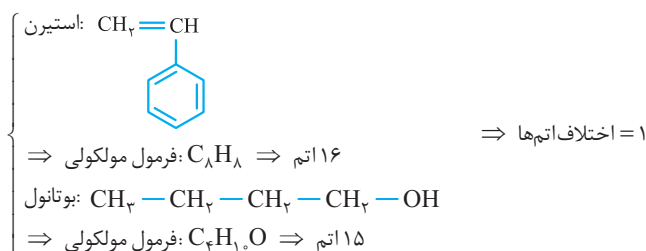
ت) اتم‌های O، C و H به ترتیب ۶، ۴ و ۱ الکترون ظرفیتی دارند؛ بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \text{شمار الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها} \\ \text{در مولکول (C}_{15}\text{H}_7\text{O)} \text{ a} = 15(4) + 7(1) + 1(6) = 86 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها} \\ \text{در مولکول (C}_6\text{H}_8\text{O}_6\text{)} \text{ b} = 6(4) + 8(1) + 6(6) = 68 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{اختلاف} = 18$$

تیزبازی با توجه به این‌که سؤال از نوع موردی «الف، ب و ...» است، برای راحتی و سرعت عمل بیشتر، اول باید عبارت‌های ساده‌تر رو بررسی کنی؛ یعنی عبارت «ب». با مشخص شدن درستی این عبارت، گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شن و با توجه به دو گزینه باقی‌مانده، فقط باید یکی از عبارت‌های «الف» یا «ت» رو به دلخواه بررسی کنی و به جواب برسی.

۹۴- گزینه ۱

فرمول مولکولی مولکول‌های داده‌شده و تفاوت شمار اتم‌ها در آن‌ها، به صورت زیر است:



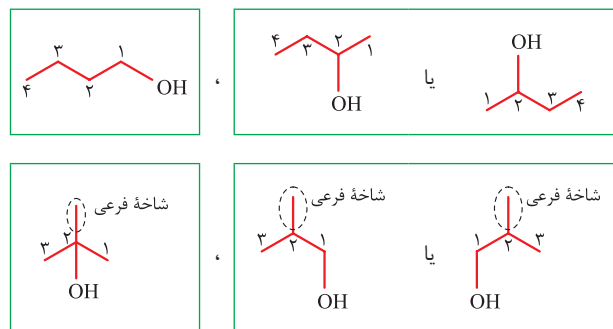
مشاوره تسلط بر مولکول‌های شیمی آلی از *لوهپا واپاته*، شدیداً توصیه می‌شه که همهٔ مولکول‌های موجود در کتاب درسی رو بشناسید و ساختار و فرمولشون رو بلد باشید.

۹۵- گزینه ۴

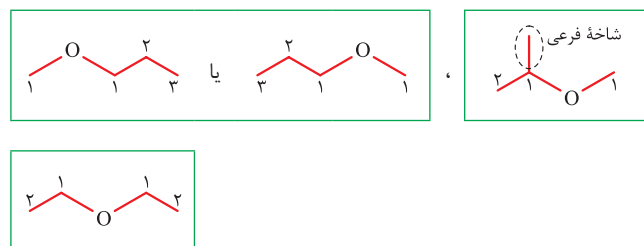
بررسی گزینه‌ها: ۱) مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم، یک پاک‌کنندهٔ خورنده است که واکنش آن‌ها با آب، گرماده است، نه گرماگیر!

و این مواد به شرط داشتن شمار اتم کربن برابر و گروه‌های هیدروکربنی سیرشده و غیرحلقوی، ایزومر یکدیگرند. بنابراین برای ترکیبی ۴کربنه با فرمول مولکولی C4H10O می‌توان فرمول‌های ساختاری الکلی و اتری را به صورت زیر رسم کرد:

ایزومری الکلیها (R-OH): الکلی C4H10O (یا همان C4H9-OH)، یک الکلی ۴کربنی است. با توجه به ساختار گروه R و شمارهٔ کربن متصل به گروه هیدروکسیل (-OH)، ۴ ساختار متفاوت را می‌توان برای آن در نظر گرفت:



ایزومری اترها (R-O-R'): اتر C4H10O (یا همان R-O-R')، یک اتر ۴کربنی است. با توجه به ساختار گروه‌های R و R' و محل قرارگیری گروه اتری (-O-)، ۳ ساختار متفاوت را می‌توان برای آن در نظر گرفت:



مشاوره ایزومری آلکان‌ها جزء اهداف کتاب درسی یازدهم بوده و هست و باید آن را بلد باشید، اما ایزومری سایر خانواده‌های ترکیب‌های آلی جزء اهداف کتاب درسی نبوده است. اما می‌بینید که بعضی وقت‌ها طراحان محترم کنکور کمی خارج از اهداف چارچوب کتاب درسی سؤال طرح می‌کنند. بنابراین بهتره شما هم همیشه نیم‌نگاهی به این موارد داشته باشید تا سر جلسهٔ کنکور سوپرایز نشید!

۹۳- گزینه ۳

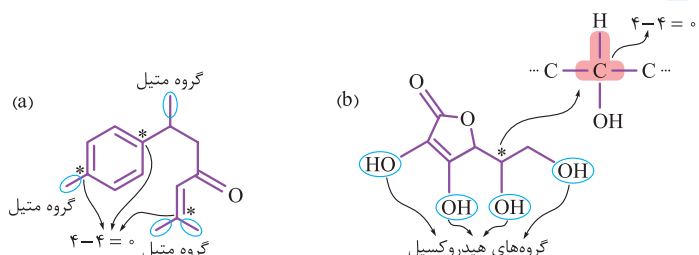
عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند. با توجه به ساختارهای داده‌شده، فرمول مولکولی (a) به صورت C15H7O و فرمول مولکولی (b) به صورت C6H8O6 است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در مولکول (a) با فرمول مولکولی C15H7O، ۱۵ اتم C وجود دارد که مجموع جرم آن‌ها برابر $15 \times 12 = 180 \text{ g.mol}^{-1}$ است؛ همچنین اتم‌های دیگر در این مولکول ۲۰ اتم H و ۱ اتم O است که مجموع جرم آن‌ها برابر $20 + 16 = 36 \text{ g.mol}^{-1}$ می‌باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{جرم اتم‌های کربن}}{\text{جرم سایر اتم‌ها}} = \frac{180}{36} = 5$$

ب) در مولکول (b)، ۴ گروه هیدروکسیل و در مولکول (a)، نیز، ۴ گروه متیل (CH3) وجود دارد.



۹۷- گزینه ۲

نکته برای بازهای ضعیف یک ظرفیتی مانند BOH می توان نوشت:

۱ $[OH^-] = M\alpha \quad (\alpha = \frac{\text{درصد یونش}}{100})$

۲ $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ در دمای اتاق

۳ $pH = -\log[H^+]$

روش گام ابتدا $[OH^-]$ را در دو محلول را حساب می کنیم:

$[OH^-] = M\alpha$

DOH محلول: $[OH^-] = M_1 \times \frac{0.12}{100} = 12 \times 10^{-4} M_1$

AOH محلول: $[OH^-] = M_2 \times \frac{0.3}{100} = 3 \times 10^{-3} M_2$

گام ۲ $[H^+]$ دو محلول و رابطه pH آن ها را می نویسیم:

DOH محلول: $[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{12 \times 10^{-4} M_1} \Rightarrow pH = -\log[H^+]$

$= -\log\left(\frac{10^{-14}}{12 \times 10^{-4} M_1}\right)$

AOH محلول: $[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{3 \times 10^{-3} M_2} \Rightarrow pH = -\log[H^+]$

$= -\log\left(\frac{10^{-14}}{3 \times 10^{-3} M_2}\right)$

گام ۳ رابطه pH دو محلول را می نویسیم:

$\begin{cases} pH(DOH) = a \\ pH(AOH) = a + 1 \end{cases} \Rightarrow pH(AOH) - pH(DOH) = 1$

$\Rightarrow -\log\left(\frac{10^{-14}}{3 \times 10^{-3} M_2}\right) - \left(-\log\left(\frac{10^{-14}}{12 \times 10^{-4} M_1}\right)\right) = 1$

$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \rightarrow \log\left(\frac{12 \times 10^{-4} M_1}{3 \times 10^{-3} M_2}\right) = 1$

$\Rightarrow \log\left(\frac{12 \times 10^{-4} M_1}{3 \times 10^{-3} M_2}\right) = 1 \Rightarrow \log \frac{10 M_1}{4 M_2} = 1$

$\log x = a \Rightarrow x = 10^a \rightarrow \frac{10 M_1}{4 M_2} = 10^1 \Rightarrow M_2 = 4 M_1$

روش در این گونه مسائل که مربوط به مقایسه دو محلول است، به جای پارامتری حل کردن سؤال، می توانیم به پارامترها به دلخواه عدد دهیم. مثلاً در این جا می توانیم pH محلول DOH را برابر ۱۰ و pH محلول AOH را برابر ۱۱ در نظر بگیریم.

$DOH: [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-10} \xrightarrow{[H^+][OH^-] = 10^{-14}} [OH^-] = 10^{-4}$

$\xrightarrow{[OH^-] = M\alpha} M = \frac{10^{-4}}{0.12} = \frac{1}{12}$

$AOH: [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-11} \xrightarrow{[H^+][OH^-] = 10^{-14}} [OH^-] = 10^{-3}$

$\xrightarrow{[OH^-] = M\alpha} M = \frac{10^{-3}}{0.3} = \frac{1}{3}$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$\frac{M(AOH)}{M(DOH)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{12}} = 4$

نکته در مورد نقش پاک کنندگی مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم در

زدودن رسوب ها، چربی ها و سایر آلاینده ها، به موارد زیر توجه فرمایید:

الف) از این پودر برای باز کردن لوله ها و مسیرهایی استفاده می شود که بر اثر ایجاد رسوب و تجمع چربی ها بسته شده اند، زیرا این مخلوط (به دلیل وجود NaOH) خاصیت بازی دارد و در واکنش با چربی ها تولید صابون می کند که نوعی پاک کننده است.

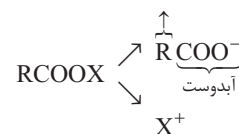
ب) واکنش این مخلوط با آب، گرماده است و دما را شدیداً بالا می برد. با افزایش دما قدرت پاک کنندگی افزایش می یابد. در ضمن گرمای آزاد شده، سبب ذوب شدن چربی ها شده و زدودن آن ها را راحت تر می کند.

پ) گاز هیدروژن تولید شده در این واکنش، پاک کنندگی این مخلوط را افزایش می دهد؛ زیرا گاز با ایجاد فشار، به رسوب ها ضربه وارد کرده و باعث خرد شدن آن ها می شود.

د) خاصیت آب گریزی بیشتر یعنی خاصیت چربی دوستی بیشتر! هر چه خاصیت چربی دوستی پارچه بیشتر باشد، لکه چربی محکم تر به پارچه می چسبد و پاک کردن آن با صابون سخت تر خواهد بود.

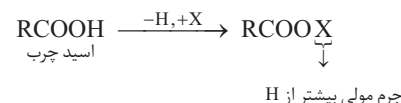
نکته صابون لکه چربی را از پاره نخ راحت تر از پارچه پلی استری پاک می کند، زیرا خاصیت چربی دوستی پارچه نخ نسبت به پارچه پلی استری، کم تر است.

۳ سر آبدوست صابون، گروه COO^- است که بار منفی دارد و سر آب گریز آن، همان زنجیر هیدروکربنی است که بار مثبت ندارد.



۴ اگر از اسید چرب، یک اتم هیدروژن کم کنیم و به جای آن یکی از کاتیون های Na^+ ، K^+ یا NH_4^+ قرار گیرد، صابون به دست می آید. با توجه به این که جرم مولی هر سه

کاتیون از جرم مولی اتم هیدروژن بیشتر است؛ قطعاً جرم مولی صابون از اسید چرب هم کربن آن بیشتر است:



۹۶- گزینه ۱

رنگ هایی که برای پوشش سطوح استفاده می شوند، از نوع کلوئیدند؛ یعنی نوعی مخلوط ناهمگن هستند و دست کم از دو جزء تشکیل شده اند اما دقت کنید که خود رنگدانه های Fe_2O_3 و TiO_2 به تنهایی، ماده خالص محسوب می شوند.

بررسی سایر گزینه ها: ۲ تیتانیوم در مقایسه با فولاد، واکنش پذیری ناچیزی دارد، به همین دلیل در ساخت پروانه کشتی، از تیتانیوم استفاده می شود.

نکته شما با توجه به جدول زیر که در فصل ۳ کتاب درسی دوازدهم اومده، باید مقایسه خواص تیتانیوم و فولاد رو بلد باشید:

ویژگی	ماده	تیتانیوم	فولاد
نقطه ذوب (°C)	۱۶۶۷	۱۵۳۵	
چگالی (g.mL ⁻¹)	۴/۵۱	۷/۹۰	
واکنش با ذره های موجود در آب دریا	ناچیز	متوسط	
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف	
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی	

۳ آرایش یون ها در سرتاسر شبکه بلوری جامدهای یونی از یک الگوی تکراری پیروی می کند، به طوری که هر کاتیون با شمار معینی آنیون و هر آنیون با شمار معینی کاتیون احاطه شده است. در ضمن هر چه جاذبه میان یون های سازنده یک ترکیب یونی (چگالی بار یون ها) قوی تر باشد، استحکام شبکه یونی و آنتالپی فروپاشی آن، بیشتر است.

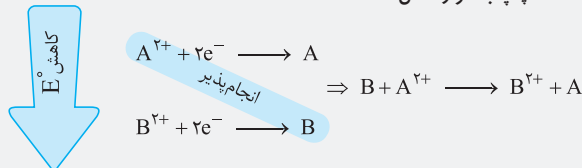
۴ این جمله به طور کلی درست است. همه فلزها رسانایی گرمایی و الکتریکی دارند اما فلزهای دسته d، در برخی ویژگی ها مانند سختی، نقطه ذوب و تنوع عدد اکسایش با بقیه فلزها متفاوت اند.

- ۳ در کتاب درسی شیمی دوازدهم می‌خوانیم که پوشاندن سطح یک فلز با لایه نازکی از فلزهای ارزشمند و مقاوم در برابر خوردگی، **آبکاری** نام دارد. فرایندی که در سلول الکترولیتی انجام می‌شود.
- ۴ تولید قوطی‌های آلومینیومی از قوطی‌های کهنه فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد؛ بنابراین می‌توان گفت که تفاوت انرژی لازم برای تولید قوطی آلومینیومی از فرایند هال با تولید آن از قوطی‌های کهنه برابر $93 - 100 = 7$ درصد است.

گزینه ۴ - ۱۰۰

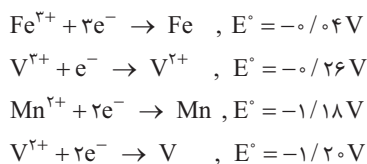
درس نامه پیش‌بینی انجام‌پذیری یا انجام‌ناپذیری یک واکنش:

در سری الکتروشیمیایی از بالا به پایین، با کاهش E° نیم‌سلول‌ها، قدرت کاهندگی گونه‌های سمت راست افزایش می‌یابد؛ بنابراین در سری الکتروشیمیایی، **گونه سمت راست پایین‌تر می‌تواند با گونه سمت چپ بالاتر واکنش دهد.**



پس در این گونه سؤالات، اول نیم‌واکنش‌ها را به ترتیب از E° زیاد به کم مرتب و سپس از قاعده بالا استفاده می‌کنیم.

ابتدا نیم‌واکنش‌ها را به ترتیب از E° زیاد به E° کم مرتب کرده و بعد گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



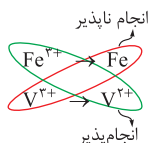
بررسی گزینه‌ها: ۱) گونه سمت راست پایین‌تر (V) می‌تواند با گونه سمت چپ بالاتر

(Fe^{2+}) به طور طبیعی واکنش دهد.

۲) گونه سمت راست پایین‌تر (Mn) می‌تواند با گونه سمت چپ بالاتر (Fe^{2+}) به طور طبیعی واکنش دهد.

۳) گونه سمت راست پایین‌تر (Mn) می‌تواند با گونه سمت چپ بالاتر (V^{2+}) به طور طبیعی واکنش دهد.

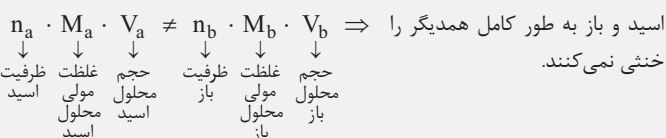
۴) گونه سمت راست بالاتر (Fe) نمی‌تواند با گونه سمت چپ پایین‌تر (V^{2+}) به طور طبیعی واکنش دهد.



گزینه ۳ - ۱۰۱

درس نامه خنثی‌شدن ناقص اسید و باز

۱ اگر محلول چند اسید و باز قوی را با هم مخلوط کنیم و مجموع $n_a \cdot M_a \cdot V_a$ اسیدها با مجموع $n_b \cdot M_b \cdot V_b$ بازها برابر نباشد، اسیدها و بازها به طور کامل یکدیگر را خنثی نمی‌کنند و مقداری از اسید یا باز باقی می‌ماند.



در این گونه موارد می‌توان، مول H^+ یا OH^- باقی‌مانده در محلول را به صورت زیر به دست آورد:

اگر مقدار مربوط به اسید ($n_a \cdot M_a \cdot V_a$) بیشتر از مقدار مربوط به باز ($n_b \cdot M_b \cdot V_b$) باشد، محیط اسیدی خواهد بود و مقدار به‌دست‌آمده این رابطه مول H^+ را نشان می‌دهد؛ اما اگر مقدار مربوط به باز ($n_b \cdot M_b \cdot V_b$) بیشتر باشد، محیط بازی خواهد بود و مقدار به‌دست‌آمده، مول OH^- را نشان می‌دهد.

تیزبازی می‌دانیم که pH با $[H^+]$ رابطه وارونه دارد و با توجه به این که pH، یک تابع لگاریتمی است، می‌توان گفت که با 10 برابر شدن غلظت H^+ ، pH به اندازه 1 واحد کم می‌شود. در این جا با توجه به این که pH محلول DOH، 1 واحد کم‌تر است می‌توان گفت که $[H^+]$ در این محلول، 10 برابر $[H^+]$ در محلول AOH است. از طرفی حاصل $[OH^-][H^+]$ در دمای اتاق، برای هر دو محلول یکسان است؛ بنابراین $[OH^-]$ در محلول DOH، $\frac{1}{10}$ $[OH^-]$ در محلول AOH است.

$$[OH^-](DOH) = \frac{1}{10} [OH^-](AOH)$$

$$\begin{aligned} [OH^-] &= M\alpha \rightarrow M(DOH) \times \frac{10^{-4}}{1\%} = \frac{1}{10} \times M(AOH) \times \frac{10^{-4}}{1\%} \\ &= \frac{M(AOH)}{M(DOH)} = 4 \end{aligned}$$

گزینه ۴ - ۹۸

درس نامه سلول‌های گالوانی

۱ در سلول‌های گالوانی، الکترود با E° کوچک‌تر، نقش آند (قطب منفی) و الکترود با E° بزرگ‌تر، نقش کاتد (قطب مثبت) را ایفا می‌کند.

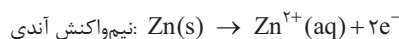
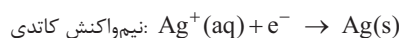
۲ ولتاژ یا emf سلول‌های گالوانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند})$$

۳ در سلول‌های گالوانی، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی، از آند به کاتد است.

۴ در سلول‌های گالوانی، آنیون‌ها به سمت آند و کاتیون‌ها به سمت کاتد حرکت می‌کنند.

بررسی گزینه‌ها: ۱) و ۳) اگر X ، الکترود Ag باشد، در سلول حاصل، Zn با E° کوچک‌تر، نقش آند و Ag با E° بزرگ‌تر، نقش کاتد را ایفا می‌کند؛ بنابراین در آند، Zn به Zn^{2+} اکسایش و در کاتد، Ag^+ به Ag کاهش می‌یابد.



با مبادله ۲ مول الکترون، ۱ مول Zn مصرف می‌شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

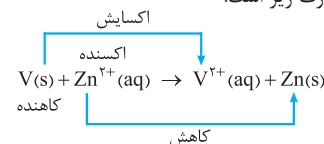
$$0.02 \text{ mole}^- \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{2 \text{ mole}^-} \times \frac{65 \text{ g Zn}}{1 \text{ mol Zn}} = 0.65 \text{ g Zn}$$

در ضمن در این سلول، جهت حرکت کاتیون‌ها به سمت کاتد یعنی الکترود نقره است.

۲) و ۴) اگر X ، الکترود V باشد، در سلول حاصل، V با E° کوچک‌تر، نقش آند و Zn با E° بزرگ‌تر، نقش کاتد را دارد؛ بنابراین جهت حرکت الکترون‌ها از آند به کاتد (از V به Zn) و جهت حرکت آنیون‌ها به سمت آند (V) است و همسو نیست.

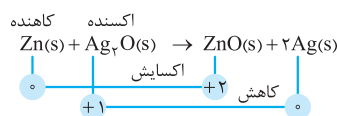
$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = -0.26 - (-1.2) = 0.94V$$

معادله کلی واکنش انجام‌شده در این سلول به صورت زیر است:



گزینه ۱ - ۹۹

در باتری‌های دگمه‌ای، همه مواد به حالت جامد هستند.



Zn اکسایش یافته از این رو نقش آند را دارد در حالی که نقره کاهش یافته و نقش کاتد را دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲) در فصل ۲ شیمی دهم می‌خوانیم که نام سنگ معدن آلومینیم، بوکسیت است. بوکسیت در واقع، Al_2O_3 به همراه ناخالصی است. Al_2O_3 واکنش‌دهنده فرایند هال است:



شفاف سازی pH محلول نهایی کمتر از ۷ است، یعنی محلول اسیدی است و طی فرایند مورد نظر، بازها به طور کامل مصرف می شوند و مقداری از اسید باقی می ماند. در ضمن با افزودن آب، تعداد مول اسید تغییری نمی کند.

گام ۶ غلظت مولی محلول NaOH را حساب می کنیم:

$$[\text{NaOH}] = \frac{4 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{40 \text{ g}}}{1 \text{ L}} = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۷ با توجه به تعداد مول اسید و بازها، تعداد مول اسید باقی مانده و در نتیجه تعداد مول باقی مانده H^+ را به دست می آوریم:

$$\text{HCl} : n_a \cdot M_a \cdot V_a = 1 \times 0.1 \times 25 = 0.025 \text{ mol}$$

$$\text{KOH} : n_b \cdot M_b \cdot V_b = 1 \times 0.1 \times 10 = 0.01 \text{ mol}$$

$$\text{NaOH} : n_b \cdot M_b \cdot V_b = 1 \times 0.1 \times 15 = 0.015 \text{ mol}$$

از کل ۰/۰۵ مول H^+ ، ۰/۰۲۵ + ۰/۰۱۵ = ۰/۰۴ مول آن با OH^- خنثی می شود و ۰/۰۱ مول آن باقی می ماند.

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a - n_b \cdot M_b \cdot V_b = 0.025 - 0.04 = -0.015 \text{ mol}$$

$$= 0.015 \text{ mol}$$

$$\text{HCl} \quad \text{KOH} \quad \text{NaOH} \\ 25 \text{ mL} + 10 \text{ mL} + 15 \text{ mL} = 50 \text{ mL} = 0.05 \text{ L}$$

گام ۸ با توجه به $[\text{H}^+]$ در محلول نهایی، حجم آب اضافه شده را به دست می آوریم:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1.7} = 10^{-2} \times 10^{0.3} = 0.02 \text{ mol.L}^{-1}$$

با افزودن آب، تعداد مول H^+ تغییری نمی کند؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$[\text{H}^+] = \frac{\text{تعداد مول } \text{H}^+}{\text{حجم نهایی محلول}} \Rightarrow 0.02 = \frac{0.015}{V_{\text{نهایی}}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{نهایی}} = \frac{0.015}{0.02} = 0.75 \text{ L}$$

$$V_{\text{نهایی}} = V_{\text{اولیه}} + V_{\text{آب اضافه شده}} \Rightarrow V_{\text{آب اضافه شده}} = 0.75 - 0.05 = 0.7 \text{ L} = 700 \text{ mL}$$

۱۰۲ - گزینه ۳

نکته با توجه به شمار جفت الکترون های ناپیوندی اتم مرکزی و شمار اتم های متصل به آن، می توان شکل هندسی یک گونه را تعیین کرد:

شمار اتم های متصل به اتم مرکزی	شمار جفت الکترون های ناپیوندی اتم مرکزی	شکل گونه	شکل کلی	مثال
۲	۰	خطی		SCO ، N_2O ، HCN و CO_2
۳	۰	سه ضلعی مسطح		SO_2 ، NO_2^- و CO_3^{2-}
۴	۰	چهاروجهی		CHCl_4 ، CH_4 ، CCl_4 ، NH_4^+ ، SO_4^{2-} ، SiF_4 و SiH_4

شمار اتم های متصل به اتم مرکزی	شمار جفت الکترون های ناپیوندی اتم مرکزی	شکل گونه	شکل کلی	مثال
۲	۱ یا ۲	خمیده		H_2S ، H_2O ، OF_2 ، SO_2 و O_3
۳	۱	هرمی		PCl_3 ، H_3O^+ ، NF_3 و NH_3

عبارت های «الف» و «ت» درست اند.

بررسی عبارت ها: الف) مولکول های «آ» و «ب» به ترتیب می توانند SO_2 و CO_2 باشند که در هر دو مولکول، اتم های مرکزی (یعنی S و C) بار جزئی مثبت دارند، زیرا خصلت نافلزی آن ها از اکسیژن کم تر است.

نکته در یک پیوند اشتراکی، هر اتمی که خاصیت نافلزی بیشتری دارد، الکترون های پیوندی را بیشتر به سمت خودش می کشد و دارای بار جزئی منفی (δ^-) است و اتم دیگر دارای بار جزئی مثبت (δ^+)!

در یک دوره جدول دوره ای، از چپ به راست خاصیت نافلزی افزایش می یابد؛ مثلاً خاصیت نافلزی کلر (Cl) از فسفر (P) بیشتر است. در یک گروه از بالا به پایین خاصیت نافلزی کاهش می یابد؛ مثلاً خاصیت نافلزی گوگرد (S) از اکسیژن (O) کم تر است. مقایسه خاصیت نافلزی چند عنصر مهم به صورت روبه رو است:

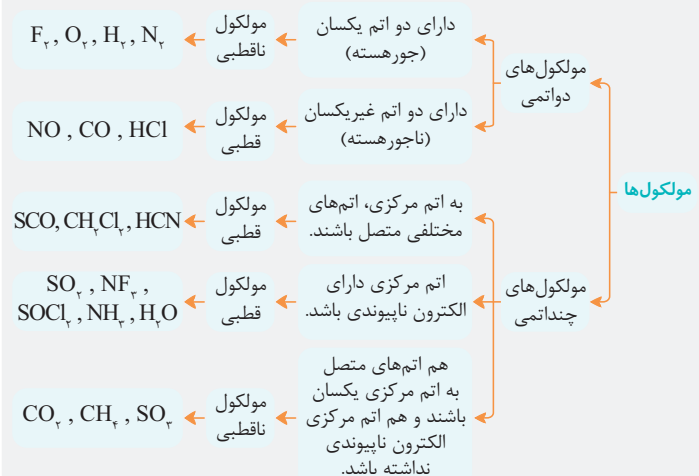
خاصیت نافلزی: $\text{F} > \text{O} > \text{N} > \text{Cl} > \text{Br} > \text{I} > \text{S} \approx \text{C} > \text{H}$

ب) Li_2O یک ترکیب یونی است و ساختار مولکولی ندارد.

پ) در مولکول CO_2 ، بار جزئی اتم مرکزی (کربن) مثبت است. اگر به جای یکی از اتم های اکسیژن این مولکول، گوگرد قرار گیرد، مولکول SCO (کربونیل سولفید) به دست می آید که بار جزئی اتم کربن در این مولکول، نیز مثبت می باشد.

ت) اگر به SO_2 ، یک اتم اکسیژن اضافه شود، مولکول SO_3 به دست می آید که یک مولکول ناقطبی با گشتاور دو قطبی برابر صفر است.

نکته به کمک قواعد زیر، می توانید قطبی یا ناقطبی بودن مولکول های دو تا پنج اتمی را بررسی کنید:



گزینه ۲ - ۱۰۳

مقدار CO از ۵/۹۹ گرم در غیاب کاتالیزگر به ۶۱/۰ گرم در حضور کاتالیزگر می‌رسد:

$$100 \times \left| \frac{\text{میزان تغییر جرم آلاینده}}{\text{مقدار اولیه آلاینده در غیاب مبدل}} \right| = \text{درصد کاهش جرم آلاینده}$$

$$\text{CO} \text{ درصد کاهش جرم} = \left| \frac{61 - 5.99}{5.99} \right| \times 100 \approx 89.8\%$$

برای قسمت دوم سؤال، باید مقدار کاهش مول CO و C_8H_{18} را حساب کرده و ببینیم کدام آلاینده، بیشترین کاهش مقدار مول را داراست:

$$\begin{aligned} \text{کاهش مول CO} &= \left| \frac{5.99 - 61}{28} \right| = \frac{55.01}{28} \approx 1.96 \\ \text{کاهش مول } C_8H_{18} &= \left| \frac{0.7 - 1.67}{114} \right| = \frac{0.97}{114} \approx 0.0085 \end{aligned}$$

گزینه ۳ - ۱۰۴

اتن (نه پلی اتن!) یکی از مهم‌ترین خوراکی‌ها در صنایع پتروشیمی به شمار می‌آید، زیرا اتن (C_2H_4)، ترکیبی سیرنشده است و از آن می‌توان مواد گوناگونی تولید کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ کاملاً درسته!

۲ حلال چسب، همان اتیل استات است که از واکنش اتانول (الکل ضدعفونی‌کننده) با استیک اسید (پرکاربردترین اسید آلی) در محیط اسیدی، تولید می‌شود.

۳ از اتان (C_2H_6) به عنوان سوخت استفاده می‌شود.

نکته برخی از موادی که از اتن می‌توان آن‌ها را سنتز کرد، به همراه کاربردهای آن‌ها، در جدول زیر آمده است:

فرآورده هدف و کاربرد آن	معادله موازنه شده سنتز
گاز اتان (C_2H_6) (سوخت)	$C_2H_4(g) + H_2(g) \xrightarrow{Ni(s)} C_2H_6(g)$ گاز هیدروژن
اتانول (C_2H_5OH) (ضدعفونی‌کننده)	$C_2H_4(g) + H_2O(l) \xrightarrow{H_2SO_4} C_2H_5OH(l)$ آب
کلرو اتان (C_2H_5Cl) (افشانه بی‌حس‌کننده موضعی)	$C_2H_4(g) + HCl(g) \rightarrow C_2H_5Cl(g)$ گاز هیدروژن کلرید
پلی اتن ($(C_2H_4)_n$) (سازنده اصلی برخی لوازم پلاستیکی)	$nC_2H_4(g) \xrightarrow{\text{دما و فشار}} -(C_2H_4)_n(s)$

گزینه ۲ - ۱۰۵

نکته جدول زیر، اثر تغییر غلظت، حجم و دما را بر تعادل به طور خلاصه نشان می‌دهد:

عامل	عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت	افزایش غلظت یک ماده کاهش غلظت یک ماده	تغییر نمی‌کند.
تغییر غلظت	تولید آن ماده	تغییر نمی‌کند.

عامل	عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل
تغییر حجم (فشار)	افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	تغییر نمی‌کند.
تغییر دما	کاهش دما افزایش دما	افزایش می‌یابد.
تغییر دما	کاهش دما افزایش دما	کاهش می‌یابد.
تغییر دما	کاهش دما افزایش دما	کاهش می‌یابد.
تغییر دما	کاهش دما افزایش دما	کاهش می‌یابد.

بررسی گزینه‌ها: ۱ واکنش (I) گرمگیر ($\Delta H > 0$) است و با افزایش دما، در جهت

رفت جابه‌جا می‌شود، بنابراین غلظت فراورده‌ها افزایش می‌یابد. با افزایش حجم ظرف در واکنش (II) و به عبارت دیگر کاهش فشار، غلظت همه مواد کاهش می‌یابد، در ضمن با کاهش فشار، تعادل به سمت تعداد مول‌های گازی بیشتر یعنی در جهت برگشت جابه‌جا شده و غلظت فراورده‌ها کاهش می‌یابد.

۲ با کاهش حجم ظرف در واکنش (I) یا به عبارت دیگر، افزایش فشار، غلظت همه مواد افزایش می‌یابد اما دقت کنید با توجه به این که شمار مول‌های گازی در دو سمت معادله واکنش برابر است، تعادل جابه‌جا نمی‌شود. در ضمن واکنش (II) گرماده ($\Delta H < 0$) است و با کاهش دما، در جهت رفت جابه‌جا می‌شود و غلظت فراورده‌ها افزایش می‌یابد.

نکته به طور کلی با افزایش حجم یک سامانه، بدون توجه به تغییرات مقدار مواد موجود در تعادل، می‌توان گفت غلظت همه مواد گازی کاهش می‌یابد. در کاهش حجم هم برعکس!

افزایش حجم (کاهش فشار) ← کاهش غلظت همه مواد گازی

کاهش حجم (افزایش فشار) ← افزایش غلظت همه مواد گازی

۳ افزایش غلظت CO در دو واکنش، تعادل‌ها را در جهت مصرف این ماده یعنی در جهت رفت جابه‌جا می‌کند اما دقت کنید که ثابت تعادل (K) فقط با تغییر دما تغییر می‌کند و با تغییر غلظت مواد، تغییری نمی‌کند.

۴ شمار مول‌های گازی در دو طرف واکنش (I) برابر است؛ بنابراین با تغییر فشار، تعادل (I) جابه‌جا نخواهد شد اما افزایش حجم ظرف (کاهش فشار) در تعادل (II) تعادل را به سمت تعداد مول‌های گازی بیشتر یعنی در جهت برگشت جابه‌جا می‌کند.